INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Přírodovědecká fakulta
Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem

Jednota českých matematiků a fyziků
pobočka v Ústí nad Labem

LETNÍ ŠKOLA MATEMATIKY A FYZIKY

Sborník příspěvků

Publikace je realizována v rámci projektu „Otevřená univerzita, otevřená věda.“,
reg. č. CZ.1.07/2.3.00./35.0044.
Tento projekt je spolufinancován z Evropského sociálního fondu a státního rozpočtu České republiky.

Tento projekt je součástí IPRM Ústí n. L. – Centrum

Text sborníku neprošel jazykovou úpravou.
Vydal: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem
Editor: Magdalena Krátká, Jindřich Prokop, Robert Seifert, 2013

Obsah

Nekonečná řada a její součet

Emil Calda
MFF UK, Praha, ecalda@volny.cz

Nekonečnou řadou se nazývá součet $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = \sum_{n-1}^{\infty} a_n$. Touto řadou je určena posloupnost (s_n) částečných součtů, kde

$$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2,\ s_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n,\ \ldots$$

Je-li tato posloupnost (s_n) konvergentní a její limita je rovna číslu s, říkáme, že i řada $\sum a_n$ je konvergentní a číslo s nazýváme součtem nekonečné řady $\sum a_n$. Jestliže $\lim s_n = +\infty$, resp. $\lim s_n = -\infty$, říkáme, že řada $\sum a_n$ diverguje k plus nekonečnu, resp. k minus nekonečnu. Jestliže neexistuje $\lim s_n$, říkáme, že řada $\sum a_n$ osciluje.

Poznámka. Všimněte si, že součet nekonečné konvergentní řady není vlastně součet, ale limita příslušné posloupnosti částečných součtů.

Příklad 1. Určete součet nekonečné řady $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$

Řešení. Každý člen a_k tohoto součtu vyjádříme ve tvaru $a_k = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$, čímž dosáhneme toho, že v součtu s_n se všechny sčítance až na první a poslední vyruší:

$$s_n = (\frac{1}{1} - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) + \ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Odtud už je snadno vidět, že $\lim s_n = 1$, takže součet dané nekonečné řady je roven jedné.

Úloha 1. Určete součet nekonečné řady
a) $\sum \frac{1}{n(n+2)}$, b) $\sum \frac{n}{(n+1)!}$, c) $\sum \frac{1}{(1+2+3+\ldots+n)}$, d) $\sum \frac{1}{\log 2^n \cdot \log 2^{n+1}}$.

Příklad 2. Dokažte, že nekonečná řada $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$ diverguje k $+\infty$.

Řešení. Každý člen a_k tohoto součtu vyjádříme ve tvaru $a_k = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, takže pro součet s_n dostaneme:

$$s_n = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1$$

Vzhledem k tomu, že $\lim s_n = +\infty$, daná nekonečná řada diverguje.
V souvislosti s tímto příkladem dokážeme větu:

Věta 1. *Je-li řada* $\sum a_n$ *konvergentní, je* $\lim a_n = 0$.

Důkaz. Důkaz je jednoduchý. Řada $\sum a_n$ je konvergentní, takže existuje $\lim s_n = s$. Protože však $a_n = s_n - s_{n-1}$, platí: $\lim a_n = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s - s = 0$. □

Obrácená věta neplatí; pro posloupnost (a_n) z příkladu 1 platí $\lim a_n = 0$, ale řada $\sum a_n$ diverguje! Uvedená věta se používá k důkazu, že daná řada není konvergentní: Nemá-li posloupnost (a_n) limitu rovnou nule, potom řada $\sum a_n$ není konvergentní. V příkladu 1 byl odvozen součet nekonečné konvergentní řady podle definice, tj. určením limity posloupnosti částečných součtů. Stejným způsobem se dá postupovat i v případě nekonečné řady geometrické, tj. řady

$$a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^n + \ldots,$$

kde číslo q – stejně jako u geometrické posloupnosti – se nazývá kvocient. Částečný součet s_n této řady pro $q \neq 1$ známe:

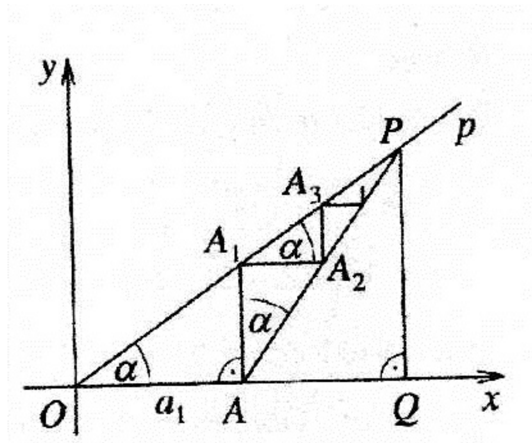
$$s_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1q^n}{1-q}$$

Uvědomíme-li si dále, že pro $|q| < 1$ je $\lim q^n = 0$, dostaneme $\lim s_n = \frac{a_1}{1-q}$, což znamená:
Nekonečná geometrická řada $\sum a_1q^n$ je pro $|q| < 1$ konvergentní a má součet

$$s = \frac{a_1}{1-q}.$$

Poznámka. U součtu nekonečné geometrické řady nezapomínejte na podmínku $|q| < 1$. Např. řada $1 + \sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \ldots$ má součet jen pro taková x, pro něž je $|sinx| \neq 1$, takže pro $x = 3\frac{\varpi}{2}$ její součet neexistuje. (Pro toto x dostaneme řadu $1 - 1 + 1 - 1 + 1 \ldots$).

Uvedený vzorec byl pro $a_1 > 0$ a $1 > q > 0$ odvozen v učebnici B. Bydžovského „Aritmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií", vydané v Praze roku 1911. Protože v tehdejší době se na gymnáziích neučily limity posloupnosti, musel být vzorec pro součet nekonečné geometrické řady odvozen jiným způsobem. Pro zajímavost si tento způsob ukážeme; připomeňme, že odvození je provedeno za předpokladu $a_1 > 0,\ 1 > q > 0$.
V souřadnicové soustavě na obr. 1 je zakreslena přímka p o směrnici $\tan\alpha = q$ a bod $A[a_1, 0]$, kterým je vedena kolmice k ose x protínající přímku p v bodě A_1 a



Obrázek 1

dále přímka, která s touto kolmicí svírá úhel α a protíná přímku p v bodě P (neboť $\alpha < 45°$). Délka úseček $OA_1,\ A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots$ vedených mezi přímkami OP a AP střídavě rovnoběžně a kolmo k ose x mají postupně délky

$$a_1,\ a_1 \tan\alpha = a_1 q, a_1 \tan^2\alpha = a_1 q^2, a_1 \tan^3\alpha = a_1 q^3, \ldots$$

takže součet s této nekonečné řady je roven součtu délek těchto úseček, tj. délce d lomené čáry $OAA_1A_2 \ldots P$. Délku d určíme tak, že k součtu délek úseček rovnoběžných s osou x který je roven délce úsečky OQ, připočteme součet délek úseček k ose x kolmých, který je roven délce úsečky PQ. Platí tedy

$$d = |OQ| + |PQ| = |OP|(\cos\alpha + \sin\alpha).$$

Délku úsečky OP určíme pomocí sinové věty v trojúhelníku OAP:

$$|OP| = a_1 \frac{\sin(\alpha + 90°)}{\sin(90° - 2\alpha)} = a_1 \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha} = a_1 \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}.$$

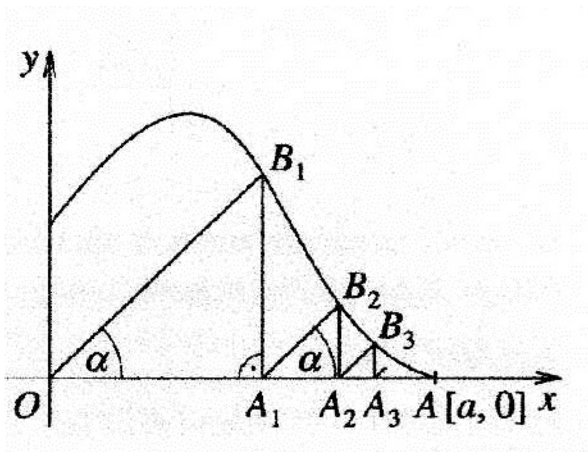
Dosazením do výše uvedeného vztahu pro d dostaneme hledaný vzorec pro součet s dané nekonečné řady:

$$d = a_1 \cos\alpha \frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = a_1 \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{a_1}{1 - \tan\alpha} = \frac{a_1}{1 - q} = s.$$

Všimněte si však, že v tomto odvození jsme se „dopustili“ jistého nedopatření, neboť jsme předpokládali, že platí:

$$|OA| + |AA_1| + |A_1A_2| + |A_2A_3| + \ldots = (|OA| + |A_1A_2| + \ldots) + (|AA_1| + |A_2A_3| + \ldots)$$

Toto nedopatření spočívalo v tom, že jsme v dané nekonečné řadě „přeházeli“ pořadí sčítanců, což však je možné provést pouze u nekonečných řad určitého typu. Naštěstí výše uvedená řada k tomuto typu patří, takže je toto odvození v pořádku. Zdůrazněme však, že přerovnat členy nekonečné řady není obecně možné!



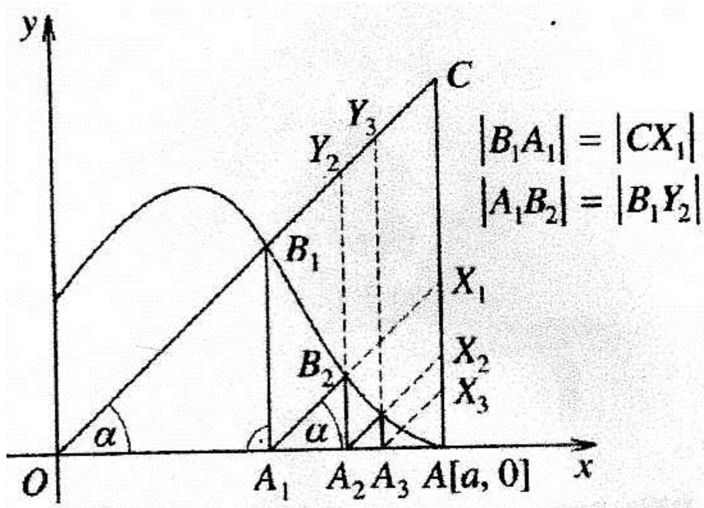
Obrázek 2

Příklad 3. Na obr. 2 je znázorněna lomená čára $OB_1A_1B_2A_2B_3\ldots$, jejíž vrcholy A_i leží na ose x a vrcholy B_i na křivce, která je grafem spojité funkce na intervalu $\langle 0, a\rangle$. Jednotlivé úsečky, z nichž je tato lomená čára složena, jsou střídavě rovnoběžné s úsečkou OB_1 a s úsečkou A_1B_1, která je kolmá na osu x. Určete délku d této lomené čáry, znáte-li úhel α a délku a.

Řešení. Sestrojíme průsečík C přímky OB_1 a kolmice k ose x vedené bodem A; z obr. 3 je vidět, že délka úsečky OC je součet délek úseček svírajících s osou x úhel α a délka úsečky AC je součet délek úseček k ose x kolmých. Podobně jako v předcházejícím odvození dostaneme

$$d = |OC| + |AC| = \frac{a}{\cos\alpha} + a\tan\alpha = a\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Všimněte si, že délka této čáry závisí jen na velikosti úhlu α a na délce intervalu $\langle 0, a\rangle$. Vezmeme-li na tomto intervalu graf jiné spojité funkce ležící v 1. kvadrantu- např. kruhový oblouk se středem v počátku-a sestrojíme-li stejným způsobem jako v příkladu 12 lomenou čáru s týmž úhlem α, bude délka této lomené čáry stejná.



Obrázek 3

Úloha 2. Vyjádřete periodické desetinné číslo $0,5\overline{47}$, jehož předperioda je 5 a perioda 47, jako podíl dvou přirozených čísel.

Příklad 4. Určete součet nekonečné řady $1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \ldots + (2n-1)x^{n-1} + \ldots$

Řešení. U této aritmeticko-geometrické řady určíme známým způsobem součet s_n jejích prvních n členů

$$s_n = \frac{2nx^n(x-1) - (x+1)(x^n-1)}{(x-1)^2}$$

a vypočteme $\lim s_n$ pro $|x| < 1$. Za tohoto předpokladu pro součet s dané řady dostaneme

$$s = \frac{x+1}{(x-1)2}.$$

Úloha 3. Ukažte, že pro součet s nekonečné aritmeticko-geometrické řady $\sum a_n b_n$, kde (a_n) je aritmetická posloupnost s prvním členem a_1 a diferencí d, (b_n) je geometrická posloupnost s prvním členem b_1 a kvocientem q, za předpokladu $|q| < 1$ platí:

$$s = \frac{a_1 b_1}{1-q} + \frac{b_1 dq}{(1-q)^2}.$$

Achilles a želva

Podle známé Zenónovy aporie Achilles nedohoní želvu, i když jeho rychlost je větší než rychlost želvy. Přiběhne-li totiž Achilles do bodu, ve kterém želva byla, než ji začal pronásledovat, želva už v něm nebude, protože za dobu, kterou Achilles k doběhnutí do tohoto budu potřeboval, se přemístila. Achilles vždy přibíhá do bodu, ve kterém už želva není, protože mezitím se z tohoto bodu vzdálila. I když se Achilles želvě neustále přibližuje, nikdy ji nedohoní, praví Zenón. Pokuste se pomocí součtu nekonečné geometrické řady určit, za jak dlouho Achilles želvu dohoní, jsou-li dány rychlosti u, v Achilla a želvy a jejich počáteční vzdálenost d.

Poznámka. Zjistit, za jak dlouho Achilles želvu dohoní, je podstatně jednodušší, když si představíme, že želva stojí a Achilles se k ní přibližuje rychlostí $u - v$. Žádný z obou způsobů výpočtu však nevysvětluje, kde je v Zenónově úvaze chyba.

Harmonická řada

V příkladu 1 byla ukázána řada, která diverguje k $+\infty$, i když její členy konvergují k nule. Podobnou vlastnost má i řada $\sum \frac{1}{n}$, která se nazývá harmonická. (Tento název má původ v tom, že každý člen této řady s výjimkou prvního je harmonickým průměrem svých členů sousedních.) Ukážeme nyní, že harmonická řada diverguje k $+\infty$.

Vyjdeme z toho, že víme, že posloupnost $(1 + \frac{1}{n})^n$ je rostoucí a že má za limitu číslo e. Znamená to, že pro všechna přirozená čísla n platí

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

neboli

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1, \text{ tj. } \frac{1}{n} > \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Z této poslední nerovnosti dostáváme, že pro všechna přirozená n platí:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} &> \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{3}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln\frac{2}{1} + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} \\ &= \frac{\ln\left(2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (n+1)\right)}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n)} = \ln(n+1). \end{aligned}$$

Tento výsledek znamená, že rostoucí posloupnost částečných součtů harmonické řady není shora omezená, takže tato řada diverguje k plus nekonečnu.
Položme si ještě otázku, zda n-tý částečný součet s_n harmonické řady je pro nějaké n celé číslo. K jejímu zodpovězení vyšetříme součet

$$s_n - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Všimněme si nejprve, že mezi všemi těmito sčítanci existuje aspoň jeden zlomek, jehož jmenovatel je mocnina dvou, a vyberme z nich ten, v jehož jmenovateli má číslo dvě největší exponent - nechť je to zlomek $\frac{1}{2k}$. V součtu

$$s_n - 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{n}$$

proto platí

$$\frac{1}{2^k} \geqslant \frac{1}{n} \geqslant \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Vyjádříme nyní každý zlomek $\frac{1}{i}$, $i = 2, 3, \ldots, n$ ve tvaru $\frac{1}{2^j} m_i$, kde 2^j je jedna z mocnin $2^0, 2^1, \ldots, 2^k$ a m_i je liché číslo, a za jejich společného jmenovatele vezmeme výraz $2^k \cdot m$, kde $m = m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$.
Převedeme-li dále všechny sčítance zkoumaného součtu na tento společný jmenovatel a sečteme-li je, bude součet $s_n - 1$ roven zlomku, jehož čitatel je

$$\frac{2^k \cdot m}{2} + \frac{2^k \cdot m}{3} + \frac{2^k \cdot m}{4} + \ldots + \frac{2^k \cdot m}{2^k - 1} + \frac{2^k \cdot m}{2^k} + \frac{2^k \cdot m}{2^k + 1} + \ldots + \frac{2^k \cdot m}{n}.$$

Protože číslo $2^k \cdot m$ je dělitelné každým z čísel $2, 3, 4, \ldots, n$, je každý z těchto $n-1$ sčítanců celé číslo a podíváme-li se pozorně, zjistíme, že všechna až na jedno jsou sudá; jediným lichým číslem je číslo $\frac{2^k \cdot m}{2k} = m$. Čitatel zlomku $s_n - 1$ je tedy číslo liché, a vzhledem k tomu, že jeho jmenovatel $2k \cdot m$ je číslo sudé, není tento zlomek celé číslo.
Tím jsme dokázali:
Součet

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$$

prvních n členů harmonické řady není pro žádné přirozené $n > 1$ celé číslo.

Diffie-Hellman-Merkle algoritmus výměny klíčů

Petr Gajdoš
SUSE Linux, Praha, czabas@volny.cz

Abstrakt

Protože elektronická výměna informací hýbe světem, je nutno se zabývat její bezpečností. Spolehlivá komunikace musí být v ideálním případě zabezpečena proti:

1. **odposlechu** – nikdo krom adresáta nesmí být schopen tajnou zprávu M číst,
2. **pozměnění** – M nemůže modifikovat nikdo jiný než odesílatel,
3. **podvrhnutí** – účastník komunikace se nemůže vydávat za někoho jiného,
4. **zamezení** – nikdo by neměl být schopen přerušit komunikaci jakýmkoliv způsobem.

Pojďme se nyní podívat na jeden z problémů, který vyplývá ze snahy dosáhnout jistého stupně zabezpečení komunikace[1].

Kryptologie jako věda se dělí na dvě oblasti, *kryptografii* a *kryptoanalýzu.* Velmi stručně řečeno, **kryptografie** se zabývá konstrukcí šifrovacích algoritmů (šifer), naproti tomu **kryptoanalýza** se pokouší je prolomit, tj. zjišťuje, do jaké míry je za daných okolností nějaká šifra bezpečná. Přitom je veledůležité si uvědomit: **vždy** záleží také na tom, jak bezpečná šifra **má** být.
Za základní současné[2] dělení šifer se považuje:

1. šifra **symetrická** – obě dvě strany komunikace sdílí tajný klíč. Odesílatel zašifruje zprávu tajným klíčem a odešle šifrovaný text adresátovi. Ten jej pak dešifruje stejným klíčem anebo klíčem odvozeným od šifrovacího,

2. šifra **asymetrická** – každý účastník komunikace má jeden soukromý a jeden veřejný klíč. Adresát dešifruje svým soukromým klíčem zprávu zašifrovanou svým veřejným klíčem.

[1] Nalezené chyby posílejte prosím na adresu czabas@volny.cz.
[2] Od r. 1976, viz [4].

Veřejný klíč asymetrické šifry (viz například *RSA*) je zcela záměrně k dispozici každému, a není proto třeba řešit bezpečné předání odesílateli šifrované zprávy. Jiná situace nastává, je-li potřeba sdílet tajný klíč symetrické šifry. Jeho distribuci od jednoho účastníka komunikace ke druhému řeší například *Diffie-Hellman-Merkle (DHM)* algoritmus pro výměnu klíčů.

Šifra Julia Caesara

Nesetkal jsem se s učebnicí či přednáškou o kryptologii, která by nezačínala **Caesarovou šifrou**. Asi proto, že se na ní dají pěkně ukázat prvky symetrické komunikace a slabiny jednoduchých šifer. Nutno podotknout, že Caesar ji však regulérně používal pro vojenské účely. Její převodník je následovný:

```
původní text:    ABCDEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZ
šifrovaný text:  DEFGHIJKLMNOPQRSTUVWXYZABC
```

Je tedy možno říci, že došlo k jistému *kruhovému* posunu v abecedě o tři písmena.

Příklad 1. Zašifrujme: `LSMFDVATISICEJEDENACT`.

```
původní text:    LSMFDVATISICEJEDENACT
šifrovaný text:  OVPIGYDWLVLFHMHGHQDFW
```

□

Úloha 1. Dešifrujte: `YRVPCDMGHPHQDNRIROX`.

Modulární aritmetika

Aby se nám o této problematice lépe hovořilo, označíme

$$r = a \bmod n \tag{1}$$

zbytek po dělení a číslem n. To můžeme udělat, protože podle věty o dělení se zbytkem existuje **právě jedno** číslo q a **právě jedno** číslo[3] $0 \leqslant r < n$ tak, že

$$a = q \cdot n + r.$$

Očíslujeme-li totiž jednotlivá písmena abecedy,

[3]Důležité je, že r je **pod** n. Toto naše označení **má jen málo** společného s kongruencí modulo n. Jedná se spíše o operátor modulo, často %, známý z programovacích jazyků.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

lze Caesarovu šifru matematicky vyjádřit pomocí přičítání čísla 3 modulo 26. Počítání modulo konstanta splňuje onu požadovanou kruhovost. Například

$$(12 + 3) \bmod 26 = 15$$

a

$$(24 + 3) \bmod 26 = 1,$$

tj. písmeno M je zašifrováno na P, resp. Y na B. Je samozřejmě možné šifrovat nejen klíčem 3, ale jakýmkoliv číslem[4] $0 < k < 26$. Je jasné, že k musí obě strany komunikace udržet v tajnosti.

Příklad 2. Všimněme si, že pro $0 \leqslant x < n$ jest

$$(-x) \bmod n = n - x$$

Rovnost okamžitě vyplývá z definice (1) a vztahu $-x = -1 \cdot n + (n - x)$.

$\square$

Úloha 2. Zdůvodněte

$$(u \cdot n + v) \bmod n = v \bmod n \tag{2}$$

Příklad 3. Dokažme, že

$$(a + b) \bmod n = (a \bmod n + b \bmod n) \bmod n \tag{3}$$

Položme $r_a = a \bmod n$ a $r_b = b \bmod n$. Existují čísla q_a a q_b tak, že

$$\begin{aligned} a &= q_a \cdot n + r_a \\ b &= q_b \cdot n + r_b \end{aligned}$$

a vzhledem k (2)

$$\begin{aligned} (a + b) \bmod n &= (q_a n + r_a + q_b + r_b) \bmod n \\ &= ((q_a + q_b)n + (r_a + r_b)) \bmod n = (r_a + r_b) \bmod n \end{aligned}$$

$\square$

[4] Kontrolní otázka: Co znamená šifrovat klíčem 0, 26 nebo $k > 26$?

Úloha 3. Podobně ukažte, že

$$(a \cdot b) \bmod n = (a \bmod n \cdot b \bmod n) \bmod n \tag{4}$$

Poznámka 1. *Z rovnosti (4) okamžitě plyne*

$$a^m \bmod n = (a \bmod n)^m \bmod n \tag{5}$$

Malá Fermatova věta

Nejen *RSA*, příklad algoritmu pro asymetrické šifrování, ale i *DHM* užívá k ospravedlnění své funkčnosti poučku známou pod názvem **Malá Fermatova věta**[5]. Její důkaz si zjednodušíme následujícím lemmatem. Zamyslete se nejdříve nad následující úlohou.

Úloha 4. Nechť p je prvočíslo. Pro která i je číslo

$$\binom{p}{i} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-i+1)}{i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

děliterlné p a pro které ne?

Lemma 1. *Nechť* $x, y \in \mathbf{Z}$. *Pro každé prvočíslo* p *platí, že*

$$(x+y)^p \bmod p = x^p + y^p \bmod p$$

Důkaz. Podle věty o *binomickém rozvoji* máme

$$(x+y)^p = \binom{p}{0} x^p y^0 + \binom{p}{1} x^{p-1} y^1 + \ldots + \binom{p}{p-1} x^1 y^{p-1} + \binom{p}{p} x^0 y^p,$$

kde pro $0 < i < p$ je výraz

$$\binom{p}{i} = \frac{p \cdot (p-1) \cdot \ldots \cdot (p-i+1)}{i \cdot (i-1) \cdot \ldots \cdot 1}$$

evidentně dělitelný prvočíslem p. Odtud

$$p \mid \binom{p}{1} x^{p-1} y^1 + \ldots + \binom{p}{p-1} x^1 y^{p-1}.$$

□

[5] Respektive její důsledek zapsaný v naší notaci.

Úloha 5. Čemu je roven výraz $a^p \bmod p$, pokud prvočíslo p dělí a?

Věta 2. *Nechť a je nezáporné celé číslo a p je prvočíslo, které nedělí a (píšeme $p \nmid a$). Potom*

$$a^p \bmod p = a \bmod p, \tag{6}$$

tedy zbytky po dělení čísel a^p, a číslem p jsou stejné.

Důkaz. Postupujme indukcí vzhledem k a.

1. Pro $a = 0$ je rovnost splněna, neboť $0^p \bmod p = 0$
2. Předpokládejme, že tvrzení platí pro $a = k$, tedy pokládejme $k^p \bmod p = k \bmod p$ za platné a pokusme se dokázat totéž pro $a = k + 1$, tj.

   $$(k+1)^p \bmod p = k + 1 \bmod p.$$

   Z lemma 1 plyne

   $$(k+1)^p \bmod p = k^p + 1 \bmod p,$$

   z indukčního předpokladu pak

   $$k^p + 1 \bmod p = k + 1 \bmod p.$$

□

Existují celé dokumenty, které se zabývají různými důkazy Malé Fermatovy věty, například viz[6] [5].

Poznámka 2. *Tuto větu lze přeformulovat různými způsoby:*

$$a^p \bmod p = a \bmod p \Leftrightarrow a^{p-1} \bmod p = 1 \Leftrightarrow p \mid a^{p-1} - 1 \Leftrightarrow p \mid a^p - a \tag{7}$$

Množina G_p a její generátory

Pro každé p označme

$$G_p = \{1, 2, 3, \ldots, p-1\}.$$

Generátorem této množiny budeme rozumět každé číslo g takové, že

$$G_p = \{g^1 \bmod p, g^2 \bmod p, g^3 \bmod p, \ldots, g^{p-1} \bmod p\}.$$

[6] Zejména v tomto případě rozhodně preferuji anglickou verzi před českou.

Příklad 4. Je číslo 6 generátorem množiny G_{13}?

$$\begin{aligned}
6^1 \bmod 13 &= 6 \\
6^2 \bmod 13 &= 10 \\
6^3 \bmod 13 &= (10 \cdot 6) \bmod 13 &= 8 \\
6^4 \bmod 13 &= (8 \cdot 6) \bmod 13 &= 9 \\
6^5 \bmod 13 &= 2 \\
6^6 \bmod 13 &= 12 \\
6^7 \bmod 13 &= 7 \\
6^8 \bmod 13 &= 3 \\
6^9 \bmod 13 &= 5 \\
6^{10} \bmod 13 &= 4 \\
6^{11} \bmod 13 &= 11 \\
6^{12} \bmod 13 &= 1
\end{aligned}$$

Tedy $\{6^1, 6^2, 6^3, \ldots, 6^{12}\} = \{6, 10, 8, 9, 2, 12, 7, 3, 5, 4, 11, 1\} = \{1, 2, 3, \ldots, 13 - 1\}$. Číslo $g = 6$ je tedy generátorem množiny G_{13}.

$\square$

Poznámka 3. *Všimněme si, že evidentně* $6^{13} = 6$, $6^{14} = 10$, $6^{15} = 8$ *atd. Vidíme, že celá sekvence se opět opakuje. Proč?*

Příklad 5. Je číslo 8 generátorem množiny G_{13}?

$$\begin{aligned}
8^1 \bmod 13 &= 8 \\
8^2 \bmod 13 &= 5 \\
8^3 \bmod 13 &= 1 \\
8^4 \bmod 13 &= 8 \\
8^5 \bmod 13 &= 5 \\
8^6 \bmod 13 &= 1 \\
8^7 \bmod 13 &= 8 \\
8^8 \bmod 13 &= 5 \\
8^9 \bmod 13 &= 1 \\
8^{10} \bmod 13 &= 8 \\
8^{11} \bmod 13 &= 5 \\
8^{12} \bmod 13 &= 1
\end{aligned}$$

Tedy $\{8^1, 8^2, 8^3, \ldots, 8^{12}\} = \{8, 5, 1\}$. Číslo $g = 8$ tedy není generátorem množiny G_{13}.

$\square$

Poznámka 4. *Oba případy ilustrují platnost Malé Fermatovy věty.*

Diffie-Hellman-Merkle distribuce klíčů

Césarovu šifru je jednoduché rozšifrovat, známe-li její algoritmus. Zdálo by se, že je tedy nutné tajit algoritmy šifer. Moderní kryptologie však razí opačný trend: algoritmus je nutné zpřístupnit širokému spektru lidí a podrobit jej tím tvrdé kryptoanalýze. Bezpečnost šifry potom spočívá výhradně na bezpečnosti klíčů a, uvažujeme-li o symetrické šifře, jejich distribuci. Jednou z možností, jak klíče distribuovat je algoritmus, jehož autory jsou Whitfield Diffie, Martin Hellman a Ralph Merkle.

Dejme tomu, že si chce **Alice** s **Bedřichem** vyměnit důvěrnou informaci, jíž se nesmí zmocnit **Eva**, například klíč k symetrickému šifrování. Podle DHM budou postupovat takto[7]:

Alice		**Eva**		**Bedřich**
zvolí prvočíslo p a k němu generátor $g < p$ množiny G_p; pošle je Bedřichovi	$\rightarrow$	potenciálně zná p a g	$\rightarrow$	zná p a g
zvolí náhodné číslo r_A (tajné)				zvolí náhodné číslo r_B (tajné)
vypočítá $x = g^{r_A} \bmod p$ a pošle Bedřichovi	$\leftarrow$ $\rightarrow$	potenciálně zná x, y	$\leftarrow$ $\rightarrow$	vypočítá $y = g^{r_B} \bmod p$ a pošle Alici
vypočítá tajný klíč $k = y^{r_A} \bmod p$ $= g^{r_A \cdot r_B} \bmod p$				vypočítá tajný klíč $k = x^{r_B} \bmod p$ $= g^{r_A \cdot r_B} \bmod p$

Tabulka 1: Diffie-Hellman-Merkle algoritmus

Příklad 6.

Na rozdíl od Caesarovy šifry si jednotlivé strany klíč nevolí. Vzhledem k tomu, že klíč vzniká z náhodných čísel r_A a r_B, sám je také náhodné číslo.

Celá bezpečnost DHM stojí na obtížnosti ze znalosti $x = g^{r_A}, y = g^{r_B}$ získat tajná čísla r_A a r_B. Pokud by tomu tak nebylo, **Eva** po získání těchto čísel okamžitě vypočítá $k = g^{r_A \cdot r_B}$.

[7] Zdroj: [3]

Alice		**Eva**		**Bedřich**
$p := 13, g := 6$	$\rightarrow$	$p = 13$ a $g = 6$	$\rightarrow$	$p = 13$ a $g = 6$
$r_A := 11$				$r_B := 5$
$x = 6^{11} \bmod 13 = 11$	$\leftarrow$ $\rightarrow$	$x = 11, y = 2$	$\leftarrow$ $\rightarrow$	$y = 6^5 \bmod 13 = 2$
soukromý klíč $k = 2^{11} \bmod 13 = 7$				soukromý klíč $k = 11^5 \bmod 13 = 7$

Tabulka 2: Příklad průběhu DHM

Alice nyní například[8] může zašifrovat zprávu $M < p$ vynásobením soukromým klíčem

$$C(M) = (M \cdot k) \bmod p$$

a obdržet tím šifrovanou zprávu C.
Bedřich poté C dešifruje vynásobením $(C \cdot k^{-1}) \bmod p = (C \cdot g^{-r_A \cdot r_B}) \bmod p$:

$$(C \cdot k^{-1}) \bmod p = ((M \cdot k) \cdot k^{-1}) \bmod p = (M \cdot 1) \bmod p = M$$

Komunikace tedy vypadá následovně:

Alice	$\xrightarrow{C}$	**Bedřich**
$C = (M \cdot k) \bmod p$		$M = (C \cdot k^{-1}) \bmod p$

Bedřich může pak vypočítat inverzní prvek užitím Malé Fermatovy věty:

$$\begin{aligned} x^{(p-1)-r_B} &= (g^{r_A})^{(p-1)-r_B} = g^{r_A \cdot (p-1) - r_A \cdot r_B} \\ &= (g^{p-1})^{r_A} \cdot g^{-r_A \cdot r_B} = 1 \cdot g^{-r_A \cdot r_B} = k^{-1} \end{aligned}$$

vše $\bmod p$.

Příklad 7.

Navážeme-li na příklad 6 ($p = 13$, $r_B = 5$, $k = 7$), symetrická šifra by pro $M = 12$ mohla probíhat takto:

[8] Klíč může být vstupem jakékoliv symetrické šifře.

Alice	$\xrightarrow{C=6}$	**Bedřich**
$M = 12$		$\begin{aligned} k^{-1} &= x^{(p-1)-r_B} \bmod p \\ &= 11^{(12-5)} \bmod 13 = 2 \end{aligned}$
$\begin{aligned} C &= (M \cdot k) \bmod p \\ &= (12 \cdot 7) \bmod 13 = 6 \end{aligned}$		$\begin{aligned} M &= (C \cdot k^{-1}) \bmod p \\ &= (6 \cdot 2) \bmod 13 = 12 \end{aligned}$

Úloha 6. Jak zjistí prvek $k^{-1} = g^{-r_A \cdot r_B}$ **Alice**? Uveďte příklad šifrované komunikace pro **Bedřichovu** zprávu $M = 3$, jejíž příjemcem je **Alice**.

Literatura

[1] *Diffie Hellman Key Agreement Method* (RFC 2631). [cit. 11. května 2011]. Dostupné z : http://tools.ietf.org/html/rfc2631.

[2] *Modular Arithmetic*. [cit. 11. května 2011]. Dostupné z : http://en.wikipedia.org/wiki/Modular_arithmetic.

[3] *Diffie-Hellman key exchange*. [cit. 11. května 2011]. Dostupné z : http://en.wikipedia.org/wiki/Diffie%E2%80%93Hellman_key_exchange.

[4] DIFFIE, Whitfield, HELLMAN, Martin E. New Directions in Cryptography, *IEEE Transactions on Information Theory*, 1976.

[5] *Proofs of Fermat's little theorem*. [cit. 13. května 2011]. Dostupné z : http://en.wikipedia.org/wiki/Proofs_of_Fermat%27s_little_theorem.

Jak lze rozvíjet a testovat vědecké myšlení žáků?

Eva Hejnová
Katedra fyziky Přírodovědecké fakulty UJEP v Ústí nad Labem, eva.hejnova@ujep.cz

Úvod

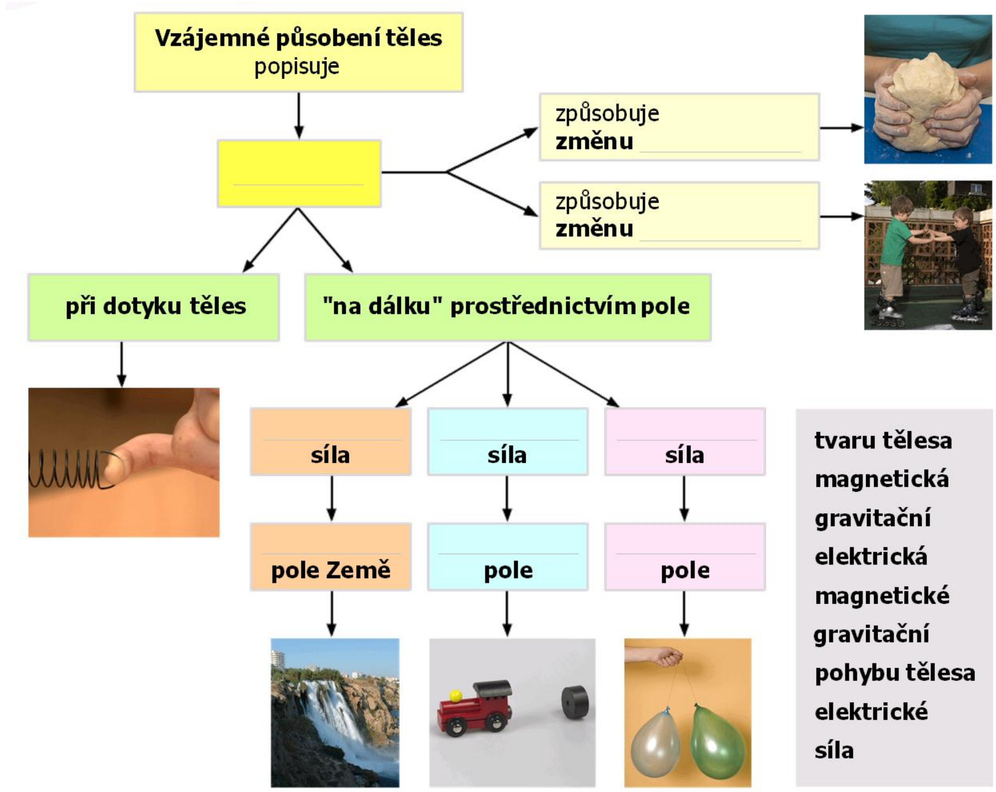
Stále větší počet škol v současné době využívá ve výuce interaktivní tabule, interaktivní učebnice apod. Žáci většinou oceňují využívání těchto moderních pomůcek, neboť jim nabízejí méně stereotypní formu výuky. Také mnozí učitelé tyto prostředky rádi využívají, mnozí k nim však stále přistupují s nedůvěrou a někteří je odmítají úplně. V příspěvku bude nejprve krátce představeno další z řady CD (Vlastnosti látek a těles), které vydalo v roce 2011 nakladatelství Prometheus jako pomůcku pro práci s interaktivní tabulí. V další části příspěvku se zaměřím na příklady úloh, vybraných z nového CD, které mohou přispívat k rozvoji kritického (vědeckého) myšlení žáků. V poslední části příspěvku uvedu několik základních informací o Lawsonově testu vědeckého uvažování, který účastníci letní školy řešili.

Základní informace o novém CD (Vlastnosti látek a těles)

V roce 2009 připravilo nakladatelství Prometheus pro podporu interaktivní výuky fyziky CD s multimediálními prezentacemi pro výuku fyziky na ZŠ s možností využití na interaktivní tabuli [3] , které zahrnuje učivo tématického celku Měření fyzikálních veličin. Další CD z této řady, které vyšlo začátkem roku 2011, je zaměřeno na téma Vlastnosti látek a těles [4] . Obě CD doplňují učebnici autorů R. Kolářová a kol.: Fyzika pro 6. ročník ZŠ, dobře však poslouží i učitelům, kteří učí podle jiných učebnic. Autorský kolektiv je tvořen didaktiky i učiteli ze základních škol (E. Hejnová, Přírodovědecká fakulta UJEP, Ústí nad Labem, R. Kolářová, Matematicko-fyzikální fakulta UK, Praha, V. Bdinková, Základní škola, Novolíšenská 10, Brno, V. Kamenická, Základní škola, Uhelný trh 4, Praha 1). CD Vlastnosti látek a těles zahrnuje pět předváděcích sešitů: Tělesa a látky, Síly, Stavba látek, Elektrování a Magnety. Stejně jako v předchozím CD jsme do jednotlivých prezentací zařazovali zejména různé typy úloh, přičemž důraz jsme kladli zejména na využití fyzikálních poznatků v běžném životě a na mezipředmětové vazby. Ke zvýšení motivace žáků přispěje i maximální snaha zařazovat zajímavé problémové úlohy, náměty na samostatnou práci, různé soutěže, využívání odkazů na webové stránky atd. Učitel také může prezentace podle svých představ upravovat, doplňovat a aktualizovat. Podrobnější popis k uspořádání jednotlivých sešitů lze nalézt v publikaci [5] . Ukázky úloh z CD jsou ke stažení na stránkách nakladatelství Prometheus [9] . Většina úloh je doplněna metodickými poznámkami, které učiteli usnadňují přípravu na výuku a často zahrnují i další náměty na aktivity, jež lze se žáky provádět v souvislosti s uvedenou úlohou nebo problémem. Na mnoha stránkách v předváděcích sešitech jsou uvedeny odkazy na internet, kde lze najít další zajímavosti, informace k danému tématu, obrázky, applety apod. Některé stránky obsahují také námět na provedení pokusu. Pro snazší provedení experimentu je stránka doplněna názornými fotografiemi, případně videonahrávkou. Závěrečné stránky každého sešitu zahrnují nejrůznější zajímavosti, nápady, doplňovačky a náměty na další činnosti, které lze v souvislosti s probíraným tématem provádět. Na konec každého předváděcího sešitu jsou zařazeny pojmové struktury, resp. pojmové mapy. Pojmová mapa je diagram znázorňující vztahy mezi pojmy uspořádanými v hierarchické struktuře. Lze si ji představit jako převrácený strom: v horní části mapy je nejobecnější pojem a ten je spojen čarami (větvemi) se specifičtějšími pojmy v nižších úrovních mapy a z nich se rozvětvují čáry (větve) k pojmům ještě nižších úrovní (obr. 1). Pro zachycení vztahů mezi pojmy jsou použita i tzv. křížová spojení, tj.čáry propojující pojmy z různých „větví“. Podobnou technikou je myšlenkové mapování zavedené T. Buzanem [1] . V myšlenkové mapě je hlavní (obecný) pojem uprostřed a z něj vycházejí do všech stran čáry (větve), na jejichž konci jsou specifičtější pojmy. Lze si ji představit jako pohled na strom shora. Ve srovnání s pojmovou mapou nejde o hierarchické uspořádání pojmů a zpravidla nejsou křížově propojeny pojmy z různých větví. Myšlenkové mapy si žáci vytvářejí individuálně, popř. ve skupinách, mohou být vzájemně značně odlišné. Žáci je mohou vytvářet postupně např. jak se při probírání určitého tématu seznamují s dalšími pojmy.

Obrázek 1: Ukázka hotové pojmové mapy z CD

Při vytváření pojmových map se musí žáci zamýšlet i nad hierarchií pojmů a jejich vzájemnými vztahy. To je obtížnější, ale dává jim to hlubší vhled do vztahů mezi pojmy a usnadňuje to vytvoření celkového obrazu o daném tématu a tím napomáhá i lepšímu zapamatování a využití poznatků. Nácviku vytváření pojmových map by mohly pomoci i stránky zařazené na konci každého předváděcího sešitu. Jsou tam uvedeny jednak hotové pojmové mapy a jednak neúplné mapy, kde žáci doplňují z nabídnutých pojmů. Protože se s touto technikou setkávají žáci v 6. ročníku poprvé, doplnili jsme i ilustrační obrázky, které jim mohou některé pojmy připomenout. Učitel podle situace v dané třídě může buď použít hotovou mapu a postupně ji při probírání učiva odkrývat pomocí nástroje clona (např. u Měření fyzikálních veličin) nebo zkusit se žáky doplňovat neúplné mapy (obr. 2) po probrání tématu při opakování a systemizaci učiva, popř. nechat žáky tvořit postupně pojmové mapy samostatně a pak je porovnat s hotovými mapami.



Obrázek 2: Ukázka neúplné mapy, kterou žáci na interaktivní tabuli doplňují

Rozvoj přírodovědné gramotnosti žáků pomocí vybraných úloh z CD

Výzkum PISA 2006 ukázal [8] , že „silnou stránkou českých žáků jsou především faktografické znalosti. Problémy jim ale dělalo např. vytváření hypotéz, využívání různých výzkumných metod, experimentování, získávání a interpretace dat, posuzování výsledků výzkumu, formulování a dokazování závěrů“. Naši žáci byli podle [6] úspěšnější při aplikaci vědomostí než při rozpoznávání otázek, které lze vědecky zkoumat a při používání vědeckých důkazů. Výuka přírodovědných předmětů na našich základních školách zpravidla klade tradičně větší důraz „na shromažďování a reprodukci teoretických znalostí než na podstatu vědeckého zkoumání a uvažování“. Navíc poslední šetření, realizované v roce 2009, ukázalo [7] , že za časové období od roku 2006 do roku 2009 se výsledky českých žáků v přírodovědné části testu významně zhoršily (větší pokles ve výsledku svých žáků zaznamenalo pouze Rakousko). Z výše uvedených důvodů považuji za důležité, aby učitel měl možnost zadávat žákům úlohy rozvíjející vědecké myšlení co nejčastěji. Bohužel takovéto typy úloh se v našich učebnicích a sbírkách úloh vyskytují spíše sporadicky a jejich zdroje jsou tak značně omezené. Pro učitele je velmi obtížné, aby si tyto typy úloh vymýšlel sám. Domnívám se, že některé úlohy, které jsou uvedeny na CD, mohou dobře posloužit k rozvoji kritického (resp. vědeckého) myšlení žáků a mohou tak přispívat k rozvoji přírodovědné gramotnosti žáků. Děti se pomocí těchto úloh učí chápat souvislosti a smysl různých jevů, což se v delším časovém horizontu jeví jako významnější než předkládáme-li žákům jednotlivé pojmy či různá fakta. Žáci se pomocí takových úloh učí rozpoznávat otázky, které je možno zodpovědět pomocí vědeckého zkoumání, určovat důkazy nezbytné pro vyvození určitého závěru, vyvozovat a srozumitelně formulovat závěry nebo tyto závěry posuzovat. Tento způsob učení předkládané ve formě řešení problémů umožňuje nejen rozvíjet kritické myšlení žáků, ale přispívá též k poznávání, lepšímu chápání a porozumění okolního světa. Jednotlivé typy těchto úloh, které jsou zařazeny do CD „Vlastnosti látek a těles“, je možné rozdělit do následujících čtyř skupin:

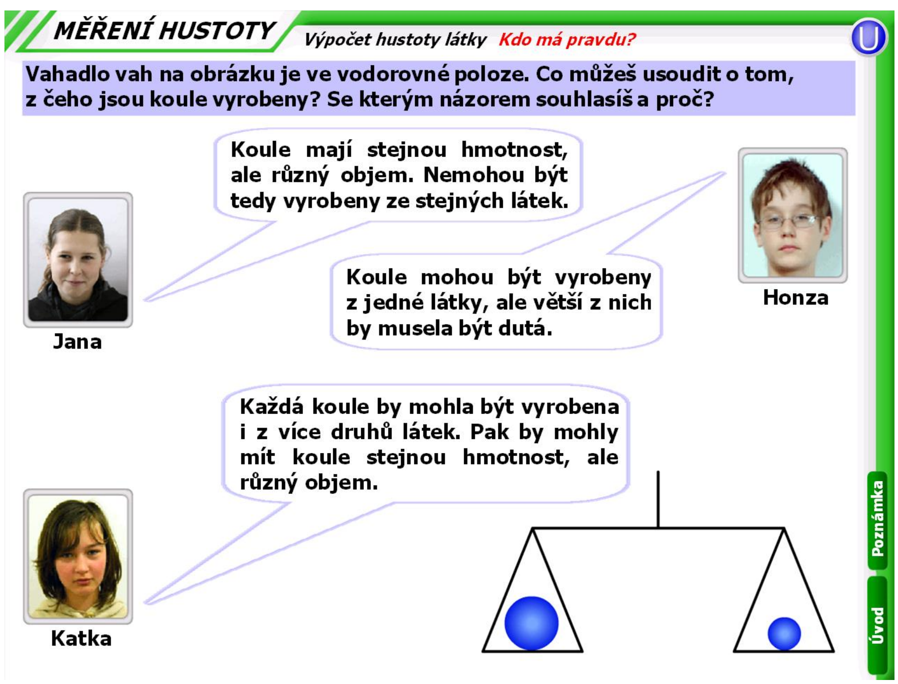
Rozhovor mezi dětmi – žáci spolu diskutují o určitém problému, který je navozen v zadání úlohy a může být doprovázen i kresbou situace či fotografií. Žákům může být předloženo několik možných závěrů či tvrzení, z nichž může být jen jedno správné, nebo mohou být správná všechna. Žáci se tímto způsobem učí dobře argumentovat, vytvářet hypotézy, vyvozovat správné závěry apod. (ilustrační úloha je převzata z [4]).

Pozorování fotografií – žáci mají na základě svého pozorování vyvodit správné závěry, nebo říci, které skutečnosti zachycené na fotografii podporují určitou domněnku (ilustrační úloha je převzata z [4]).

Obrázek 3: Rozhovor mezi dětmi

Obrázek 4: Pozorování fotografií

Pokusy zadané pomocí obrázku – žákům je předloženo vyobrazení jednoduchého pokusu a určitá myšlenka nebo hypotéza, která má být ověřena. Žáci pak mají např. naplánovat, které věci se musí porovnávat, jaké proměnné by se měly změnit, jaké kroky musí udělat, aby získali potřebné údaje atd. (ilustrační úloha je převzata z [4]).



Obrázek 5: Pokusy zadané pomocí obrázku

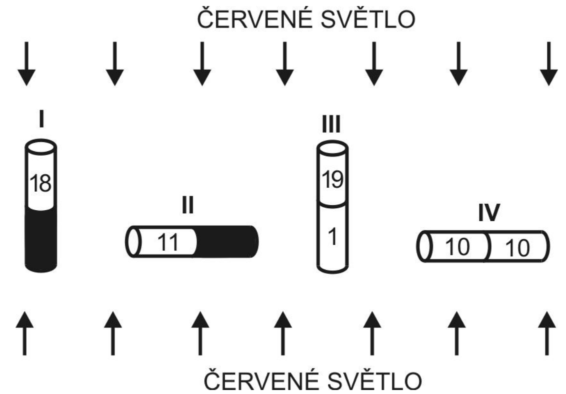
Obrázek 6: Informace z letáku, novin atd.

Informace z letáku, novin atd. – žákům je předložen stimulační materiál ve formě textu a otázka, kterou mají zodpovědět. V těchto úlohách je pak zpravidla vyžadováno vysvětlení nějakého jevu nebo zhodnocení dané situace, při které žáci prokazují porozumění určitému fyzikálnímu poznatku (ilustrační úloha je převzata z [4]).

Lawsonův test vědeckého uvažování

Pokud chce učitel zjistit, jak kvalitně jeho žáci zvládají vědecké myšlení, nezávisle na konkrétním tematickém celku a konkrétních znalostech, může mu k tomuto účelu dobře sloužit Lawsonův test vědeckého uvažování [2] . Tento test vytvořil A. E. Lawson na konci 70. let a vycházel přitom z výzkumů J. Piageta. Test vypovídá o tom, jaké úrovně vědeckého uvažování daný respondent dosáhl. V testu jsou použity otázky se stoupající náročností. Používají se různé varianty (do češtiny byla přeložena varianta s 24 otázkami), ale základní princip je vždy zachován. Tímto základním principem je, že se hodnotí odpověď na danou otázku a současně zdůvodnění této odpovědi (kromě posledních dvou otázek, které jsou

nezávislé). Jako příklad zde uvádím 11. a 12. úlohu, která patří k těm obtížnějším (z 19 učitelů vyřešilo správně obě dvě úlohy pouze 12):
11. Do každé ze čtyř skleněných trubiček dáme dvacet ovocných mušek. Trubičky těsně uzavřeme. Trubičky I a II jsou zčásti pokryty černým papírem. Trubičky III a IV nejsou vůbec zakryté. Trubičky jsou umístěny tak, jak to ukazuje obrázek. Pak je vystavíme červenému světlu po dobu pěti minut. Na obrázku jsou uvedeny počty mušek v nezakrytých částech trubiček.



Obrázek 7

Tento experiment ukazuje, že mušky reagují (to znamená, že se posunou blíž nebo dál) na: a) červené světlo, ale ne na gravitaci b) gravitaci, ale ne na červené světlo c) červené světlo i na gravitaci d) nereagují ani na červené světlo ani na gravitaci 12. protože a) většina mušek je v horní části trubičky III, ale jsou rozmístěny zhruba rovnoměrně v trubičce II. b) většina mušek nejde ke dnu trubiček I a III. c) mušky potřebují světlo, aby viděly a musí letět proti gravitaci. d) většina mušek je v horních koncích a v osvětlených koncích trubiček. e) nějaké mušky jsou na obou koncích každé trubičky. 5. Závěr V současné době má možnost velký počet základních škol získat finanční prostředky na za-koupení interaktivních tabulí i dalších prostředků ICT prostřednictvím různých projektů. Mimopražské základní školy je často získávají zejména pomocí tzv. šablon z Evropského sociálního fondu (jedná se o šablonu III „Využívání ICT“ a šablonu V „Přírodní vědy“), praž-ské základní školy pak mohou získávat projekty z různých operačních programů vyhlašovaných MŠMT. Zefektivnění pedagogické práce přinášejí zejména hotové prezentace, které vytvořili sami učitelé a jež jsou dostupné např. na internetu (viz např. portál www.veskole.cz, http://rvp.cz atd.). V reakci na potřebu nových interaktivních materiálů začala také mnohá nakladatelství (Prometheus, Fraus Terasoft, Nová škola, Conti SW apod.) vytvářet takové produkty pro výukové potřeby škol.

Domnívám se, že interaktivní prezentace, které jsme vytvořili, dobře poslouží jako výukový materiál pro smysluplné využití interaktivní tabule. V neposlední řadě mohou být úlohy a další náměty prezentované na CD také zajímavým inspiračním zdrojem pro vlastní tvorbu digitálních učebních materiálů (tzv. DUMů), které zpravidla bývají nedílnou součástí řešení různých projektů.

Literatura

[1] BUZAN, T. *Mentální mapování*. 1.vyd. Praha: Portál, 2007.

[2] DVOŘÁKOVÁ, I. *Vědecké myšlení žáků – jak ho lze rozvíjet a testovat, Moderní trendy v přípravě učitelů 5.*. Plzeň, Západočeská univerzita v Plzni, 2011 (připravuje se).

[3] HEJNOVÁ, E. a kol. *Měření fyzikálních veličin*, 1. vyd., Praha: Prometheus, 2009. ISBN 978-80-7196-380-6.

[4] HEJNOVÁ, E. a kol. *Vlastnosti látek a těles*, 1. vyd., Praha: Prometheus, 2011. ISBN 978-80-7196-413-1.

[5] HEJNOVÁ, E., KOLÁŘOVÁ, R. Interaktivní tabule ve výuce fyziky na základní škole. *Matematika-fyzika-informatika*, únor 2010, roč. 19, č. 6, s. 341–347.

[6] MANDÍKOVÁ, D. *Lze učit fyziku zajímavěji a lépe?*, Praha: MATFYZPRESS, 2008. ISBN 978-80-7378-057-9. Jak to vidí mezinárodní výzkumy aneb čeští žáci v mezinárodním srovnání, s. 51–86.

[7] BASL, J., PALEČKOVÁ, J. a TOMÁŠEK. *Umíme ještě číst?* [online]. Praha: ÚIV, 2010 [cit. 1. 4. 2011]. Dostupné z : http://www.uiv.cz/clanek/607/1871.

[8] PISA: *Měření vědomostí a dovedností – Nová koncepce hodnocení žáků*, 1. vyd. Praha: ÚIV, 1999. 76 s. ISBN 80-211-0333-7.

[9] Demoverze CD (Vlastnosti látek a těles) [cit. 1. 4. 2011]. Dostupné z : http://www.prometheus-nakl.cz/.

Jedno zkoumání kladných celých čísel

Jan Kopka
katedra matematiky Přírodovědecké fakulty UJEP, jan.kopka@ujep.cz

Zkoumání matematické situace:
Matematická situace $\longrightarrow$ experimentování $\longrightarrow$ hypotéza ověření $\longrightarrow$ důkaz $\longrightarrow$ mat. věta. V centru této cesty stojí vyslovení hypotézy. Nyní ukážeme zajímavé zkoumání celých čísel, v jehož rámci vyslovíme několik hypotéz. To povede k vytvoření určité mini–teorie. Čtenář si i pomocí tohoto článku může prohloubit svoji představu o tom, jak se pracuje v matematice.

Problém 1. Součet za sebou jdoucích kladných celých čísel
Zkoumejte, která kladná celá čísla můžeme vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel? Např. $7 = 3 + 4$ a $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Řešení. Protože o této problematice prozatím nic nevíme, začneme experimentováním. Jsou možné minimálně dva způsoby jak postupovat:

a) První způsob představuje strategii *cesta zpět*. Vezmeme nejprve za sebou jdoucí dvojice, pak trojice, pak čtveřice, atd. kladných celých čísel a vypočítáme jejich součty. Např.

$$\begin{array}{ccc}
1+2=3 & 1+2+3=6 & 1+2+3+4=10 \\
2+3=5 & 2+3+4=9 & 2+3+4+5=14 \\
3+4=7 & 3+4+5=12 & 3+4+5+6=18 \\
\vdots & \vdots & \vdots
\end{array}$$

Toto experimentování nám ukazuje, že celá čísla $3, 5, 7, 6, 9, 12, 10, 14, 18$ můžeme zapsat jako součet za sebou jdoucích čísel. Pokud je uspořádáme podle velikosti, dostaneme posloupnost

$$3, 5, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 18, \ldots$$

a můžeme objevit zákonitost – která čísla v posloupnosti jsou a která nikoliv. Ponecháme čtenáře, aby v tomto způsobu zkoumání pokračoval. Poznamenejme však, že než budete zkoumat výslednou posloupnost, tak určete ještě další součty. V námi uvedené části této posloupnosti totiž určitě ještě některá čísla chybí.

b) Druhý způsob představuje také systematické experimentování. Spočívá v tom, že budeme postupně brát podle velikosti jednotlivá přirozená čísla, tj. čísla $1, 2, 3, 4, \ldots$ a pokusíme se zapisovat je jako součet za sebou jdoucích čísel. My v dalším zvolíme právě tento druhý způsob experimentování.
Experimentování:

$1 = 0 + 1$	Neplatí, 0 není kladné číslo.
$2 =$	Nelze.
$3 = 1 + 2$	Ano.
$4 =$	Opět nelze.
$5 = 2 + 3$	Ano.

Po tomto experimentování můžeme vyslovit hypotézu:
Hypotéza 1: Sudá kladná celá čísla nelze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.
Pokračujme v systematickém **experimentování**:

$6 = 1 + 2 + 3$	Ano.	$9 = 2 + 3 + 4$	Ano.
$7 = 3 + 4$	Ano.	$10 = 1 + 2 + 3 + 4$	Ano.
$8 =$	Nelze.	$11 = 5 + 6$	Ano.

Experiment pro číslo 6 nebo 10 ukazuje, že hypotéza 1 neplatí. Každý z těchto příkladů hypotézu vyvrací. Čtenář může v experimentování ještě pokračovat. My jsme zjistili, že čísla $1, 2, 4$ a 8 nelze vyjádřit ve tvaru součtu. Jsou to mocniny čísla 2. Proto můžeme vyslovit :
Hytotéza 2: Mocniny čísla 2 nelze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.
Hypotézu 2 můžeme **testovat** např. pomocí čísla $2^4 = 16$. Zjistíme, že ani toto číslo nelze vyjádřit v požadovaném součtovém tvaru. Proto nyní ještě více věříme, že hypotéza 2 platí. Dokázat ji však v tuto chvíli neumíme. Pokud čtenář udělá ještě několik dalších experimentů, pak jistě spolu s námi dojde k závěru, že platí:
Hypotéza 3: Všechna kladná celá čísla, s výjimkou mocnin čísla 2, lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.
Jak dokázat hypotézu 2 a 3? V první řadě se pokusíme nalézt nějakou vlastnost, která od sebe odlišuje mocniny čísla 2 a ostatní kladná celá čísla. Pomocí takovéto vlastnosti se nám pak může podařit důkazy provést. Z teorie dělitelnosti víme, že mocniny čísla 2 mají jediného prvočíselného dělitele a tím je číslo 2. Všichni

dělitelé mocnin čísla 2 jsou proto sudá čísla, s výjimkou čísla 1. Naproti tomu ostatní kladná celá čísla mají vždy alespoň jednoho lichého prvočíselného dělitele různého od čísla 1. Příklad: Dělitelé čísla $2^5 = 32$ jsou: $32, 16, 8, 4, 2, 1$. Všichni dělitelé s výjimkou čísla 1 jsou sudá čísla.
Dělitelé čísla 24 jsou: $24, 12, 8, 6, 4, 3, 2, 1$. Tady je lichý dělitel různý od čísla 1. Je to číslo 3.
Máme tedy určitou vlastnost, která od sebe naše dva druhy čísel odlišuje. Přeformulujme proto pomocí této vlastnosti hypotézy 2 a 3.
Hypotéza 2a: Jestliže má kladné celé číslo n pouze sudé dělitele mimo číslo 1, pak n nelze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.
Hytotéza 3a: Jestliže má kladné celé číslo n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla 1, pak n lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel. Začneme hypotézou 3a. Pokusíme se objevit ideu jejího důkazu. Další **experimentování** nám pomůže ukázat, jak přítomnost lichého dělitele čísla n umožní napsat toto číslo v součtovém tvaru. Vezměme čísla, která mají alespoň jednoho lichého dělitele, např. násobky čísel $3, 5$ a 7.

Násobky čísla 3:	Násobky čísla 5:
$1 \cdot 3 = 1 + 2$	$1 \cdot 5 = 2 + 3$
$2 \cdot 3 = 1 + 2 + 3$	$2 \cdot 5 = 1 + 2 + 3 + 4$
$3 \cdot 3 = + 2 + 3 + 4$	$3 \cdot 5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$
$4 \cdot 3 = 3 + 4 + 5$	$4 \cdot 5 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$

Obecně

$$g \cdot 3 = (g-1) + g + (g+1) \qquad g \cdot 5 = (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2)$$

Násobky čísla 7:

$1 \cdot 7 = 3 + 4$	$4 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$
$2 \cdot 7 = 2 + 3 + 4 + 5$	$5 \cdot 7 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$
$3 \cdot 7 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$	$6 \cdot 7 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$

Obecně

$$g \cdot 7 = (g-3) + (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2) + (g+3)$$

Poznamenejme, že uvedené obecné formule platí pouze tehdy, když je číslo g dostatečně velké.

A nyní obecně: Jestliže má kladné celé číslo n lichého dělitele $2k+1$ (kde k je kladné celé číslo), to znamená, když n můžeme zapsat ve tvaru

$$n = g(2k+1), \tag{1}$$

pak n můžeme zapsat i jako součet

$$n = (g-k) + \ldots + (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2) + \ldots + (g+k). \tag{2}$$

Skutečně, jestliže sečteme výrazy (termy) na pravé straně formule (2), dostaneme výraz (term) na pravé straně formule (1). Formule (2) představuje největší objev našeho dosavadního snažení. Říká, že číslo n, které lze zapsat ve tvaru (1) je součet $2k+1$ za sebou jdoucích celých čísel, přičemž uprostřed je číslo g. Toto už téměř představuje zdůvodnění hypotézy 3a. Bohužel ale ne všechny výrazy na pravé straně formule (2) musí představovat kladná čísla. Např. jestliže použijeme formuli (2) na $n = 3, 5, 7, 10$ a 14, dostaneme:

$$\begin{aligned}
3 &= 1 \cdot 3 = 0 + 1 + 2 \\
5 &= 1 \cdot 5 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 \\
7 &= 1 \cdot 7 = -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \\
10 &= 2 \cdot 5 = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 \\
14 &= 2 \cdot 7 = -1 + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5
\end{aligned}$$

Jestliže vezmeme např. vyjádření čísla 7 a odstraníme nulu a navíc provedeme vykrácení záporných a odpovídajících kladných čísel dostaneme již naše požadované vyjádření pouze pomocí samých kladných čísel.

$$7 = 1 \cdot 7 = -2 + (-1) + 0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 3 + 4$$

Nyní již máme ideu důkazu.

Důkaz. (hypotézy 3a) Nechť kladné celé číslo n má lichého dělitele $2k+1$. Pak n lze napsat ve tvaru (1). Nyní již víme, že n můžeme přepsat do tvaru (2)

$$n = (g-k) + ... + (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2) + ... + (g+k),$$

kde g je také dělitel čísla n. Jak na pravé straně formule (2) dostaneme dvě nebo více kladných celých čísel? Jestliže je v součtu číslo 0, pak ho můžeme vyškrtnout. Pokud jsou tam záporná čísla, můžeme je vykrátit s odpovídajícími kladnými čísly. Celkový součet čísel je i po vykrácení a odstranění nuly stejný, tzn. n. Kladných čísel je víc než záporných (celkový součet je kladné číslo n), a proto tam po krácení nějaká kladná čísla zůstanou. Nemůže tam zůstat pouze jedno číslo? Nemůže. Původní počet všech čísel byl vyjádřen lichým číslem. Dáme-li nulu pryč a provedeme-li vykrácení, odstraníme lichý počet čísel. Pokud od lichého čísla odečteme liché číslo, dostaneme číslo sudé. Po vykrácení proto musí zůstat na pravé straně formule (2) sudý počet čísel, tedy nejméně dvě. □

Po tomto důkazu můžeme hypotézu 3a přejmenovat na větu.

Věta 3. *Jestliže má kladné celé číslo n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla 1, pak n lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.*

Teď již máme určité zkušenosti se zkoumanou problematikou a tak nás může napadnout, že i obrácení věty 1 by mohlo platit.

Věta 4. *Jestliže lze kladné celé číslo n vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel, pak má n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla 1.*

Důkaz. Zapišme n ve tvaru $n = g_1 + g_2 + \ldots + g_r$, kde $g_1, g_2, \ldots, g_r$ jsou za sebou jdoucí kladná celá čísla. Uvažujme dva případy:

a) r je liché číslo

b) r je sudé číslo

Případ a): Číslo n zapíšeme pomocí formule (2). Číslo uprostřed součtu označíme g. Skutečnost, že číslo r je liché garantuje, že je zde prostřední člen. Pak stejně jako při našem experimentování můžeme číslo n napsat ve tvaru $n = g \cdot (2k + 1)$. Místo $2k+1$ bychom samozřejmě mohli nyní psát r. Vidíme, že číslo n má lichého dělitele většího než 1 a je to číslo $2k + 1$.
Případ b): Nemůžeme postupovat jako v případě a), protože zde není prostřední člen. Můžeme však součet $g_1 + g_2 + \ldots + g_r$ „rozšířit“ doleva tak, že přidáme kladná čísla až k nule, nulu a záporných tolik, kolik jsme přidali kladných. K původnímu součtu tak přidáme součet

$$-(g_1 - 1) + ... + (-2) + (-1) + 0 + 1 + 2 + ... + (g_1 - 1).$$

Vzniklý součet je stejný jako původní, tzn. n, protože jsme přidali nulu a dále platí, že přidaná záporná čísla se dají vykrátit s odpovídajícími přidanými kladnými čísly. Počet sčítaných čísel je však nyní lichý. Tímto rozšířením jsme získali situaci, která je stejná jako v případě a). Číslo n je nyní rozepsané tak, jak předepisuje formule (2) a její pravou stranu můžeme upravit do tvaru formule (1). Ta nám již říká, že číslo n má lichého dělitele většího než 1. $\square$

Je těžké říci, jak jsme vymysleli v části b) „trik“ rozšíření součtu. Byli jsme motivováni tím, že jsme chtěli situaci b) převést na již vyřešenou situaci a). Takovéto triky se v matematice občas vyskytují. Je to ukázka tvůrčí stránky matematiky.
Větu 1 a k ní obrácenou větu 2 můžeme spojit do jedné věty.

Věta 5. *Kladné celé číslo n lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel, právě když má n alespoň jednoho lichého dělitele různého od čísla* 1.

Vraťme se k hypotéza 2a. Ta zatím dokázaná není. Teď by to však měla být už „hračka“. Protože mocniny čísla 2 mají pouze sudé dělitele s výjimkou čísla 1, není možné je podle věty 3 rozložit na součet za sebou jdoucích kladných celých čísel. Tato hypotéza je tak jednoduchým důsledkem věty 3. Přesto ji vyslovíme jako samostatnou větu.

Věta 6. *Mocniny čísla 2 nelze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.*

Vyslovme inspiraci pro další zkoumání.
Některá celá čísla lze vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel různým způsobem, např.:

$$18 = 5 + 6 + 7 = 3 + 4 + 5 + 6.$$

Problém: Zkoumejte, kolika způsoby lze dané kladné celé číslo n vyjádřit jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.
Můžeme opět experimentovat. K získání odpovědi nám však stačí výše uvedená mini-teorie. Teď již víme, že ke každému lichému děliteli čísla n (a právě jenom k němu) existuje rozklad čísla n na požadovaný součet. Formule (2) dokonce ukazuje, jak se tento rozklad vytvoří. Řešení vysloveného problému je proto obsaženo v následující větě:

Věta 7. *Nechť n je kladné celé číslo. Počet reprezentací čísla n jako součtů za sebou jdoucích kladných celých čísel je stejný, jako je počet lichých dělitelů čísla n různých od čísla* 1.

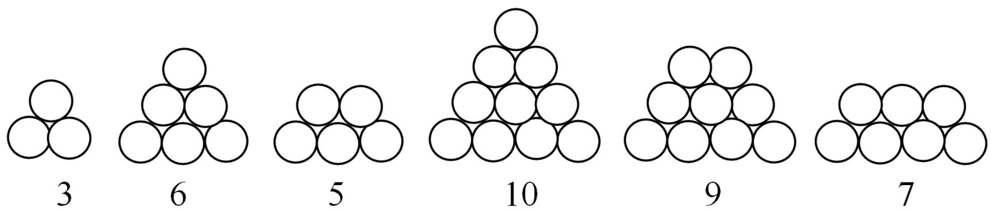
Demonstrujme větu 5 i s ukázkou vytvoření všech rozkladů pomocí následujícího příkladu.

Příklad 1. Číslo $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ má tři liché dělitele: $3, 5$ a $3 \cdot 5 = 15$. Lze proto zapsat trojím způsobem jako součet za sebou jdoucích kladných celých čísel.
Součet tří za sebou jdoucích kladných čísel: $30 = 9 + 10 + 11$.
Součet pěti za sebou jdoucích kladných čísel: $30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8$.
Součet patnácti za sebou jdoucích čísel (nebo po vykrácení čtyř za sebou jdoucích kladných celých čísel):

$$30 = (-5)+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 6+7+8+9$$

Tím naše zkoumání končí. Na závěr však ještě uvedeme dvě didaktické poznámky:

Poznámka. Při zkoumání můžeme využít *geometrickou cestu* a vzít na pomoc následující obrázky:



Obrázek 1

Protože obrázky vypadají jako složené dříví (kmeny stromů) nebo složené roury, nazývají se někdy získaná čísla „rourová“. Původní problém by pak mohl znít: Určete, která čísla jsou rourová. Pokud je na obrázku celý „trojúhelník“, odpovídá mu trojúhelníkové číslo. Pokud je na obrázku „seříznutý“ trojúhelník, pak číslo, které mu odpovídá je rozdílem dvou trojúhelníkových čísel.

Poznámka. K centrální formuli

$$n = (g-k) + ... + (g-2) + (g-1) + g + (g+1) + (g+2) + ... + (g+k)$$

můžeme dospět např. pomocí následujících příkladů

$$4 \cdot 3 = 4 + 4 + 4 = (4-1) + 4 + (4+1)$$

nebo

$$6 \cdot 5 = 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = (6-2) + (6-1) + 6 + (6+1) + (6+2).$$

Podstatné při objevování je samozřejmě to, že stejných sčítanců je lichý počet, přičemž od prostředního čísla doprava postupně čísla zvětšujeme o $1, 2, 3$, atd. a doleva čísla zmenšujeme o $1, 2, 3$, atd.

Literatura

[1] KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice.* 1. vyd. Ústí nad Labem: UJEP, 1999.

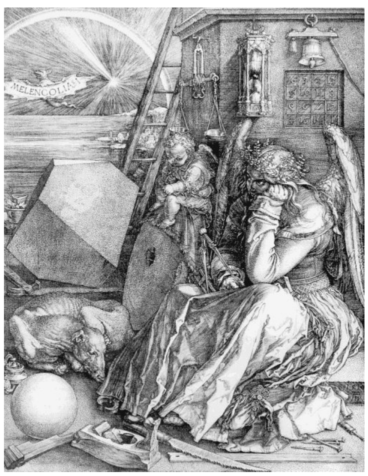
[2] KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice.* 1. vyd. Ružomberok: Katolická Univerzita, 2005.

Magický čtverec a hra s mincemi

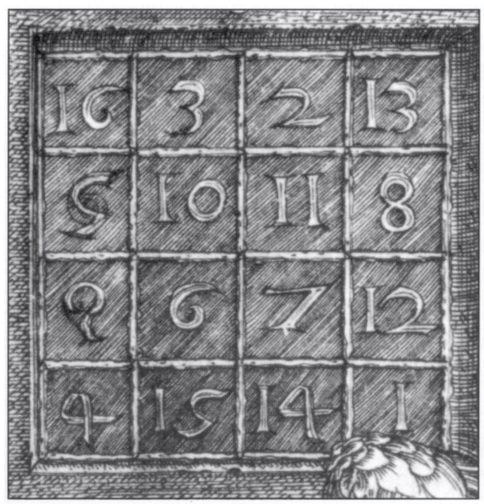
Jan Kopka
katedra matematiky Přírodovědecké fakulty UJEP, jan.kopka@ujep.cz

Tlačítka na mobilním telefonu

Magické čtverce fascinovaly matematiky již ve starověku[1]. Mezi nejznámější magické čtverce patří dnes čtverec, který je na mědirytině Melancholie od Albrechta Dürera z roku 1514. V tomto článku ukážeme jeden velmi jednoduchý případ takového čtverce.



(a) Melancholie



(b) Detail magického čtverce

Obrázek 1: Příklad magického čtverce

Úloha 1. Číselná tlačítka na mobilu jsou uspořádaná do následujícího čtverce (viz obr. 2):

[1] K následující velmi zajímavé problematice inspiroval autora prof. M. Trenkler z PF KU Ružomberok, který se problematikou magických čtverců již delší dobu zabývá.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Obrázek 2

Sečteme-li všechna čísla ve druhém sloupci nebo všechna čísla ve druhém řádku, či v hlavní nebo vedlejší diagonále, vždy dostaneme číslo 15. Překontrolujte.

Problém 2. Přemístěte tlačítka na mobilním telefonu (viz obr. 2) tak, aby výše uvedené součty zůstaly 15, ale navíc, aby i součty čísel ve zbylých řádcích a sloupcích byly 15. Přemístěte při tom minimální počet tlačítek.
Úloha po nás vlastně požaduje sestrojení určitého magického čtverce velikosti 3×3.

Řešení. Můžeme začít náhodným **experimentováním** (strategie *pokus – omyl*) nebo experimentováním *pokus – ověření – korekce*, ale to nemusí vést brzy k cíli. Toto experimentování nám však může pomoci důkladně pochopit problém. Zamyslíme se proto nad tím, jak postupovat jinak.
Položíme si otázku, která čísla by mohla být umístěna do rohů, která mezi ně a které číslo doprostřed čtverce. Součet každých tří uvažovaných čísel musí být 15. Postupujme tedy obráceně. Najděme všechny možné rozklady čísla 15 na součet tří čísel. Čísla v rozkladech však mohou být pouze čísla $1, 2, 3, \ldots, 9$. Pokud bude v rozkladu číslo 1, dostaneme:

$$15 = 1 + 5 + 9$$
$$15 = 1 + 6 + 8$$

Číslo 1 je tedy pouze ve dvou rozkladech, a musí proto být umístěno někde ve „středu strany“. Tam se totiž „protíná“ řádek a sloupec. Pokud bude v rozkladu číslo 2, dostaneme:

$$15 = 2 + 4 + 9$$
$$15 = 2 + 5 + 8$$
$$15 = 2 + 6 + 7$$

Číslo 2 je ve třech rozkladech, a musí proto být umístěno někde v rohu čtverce. Tam se „protíná“ řádek, sloupec a diagonála. Pokud bude v rozkladu číslo 3, jsou takové rozklady opět pouze dva:

$$15 = 3 + 4 + 8$$
$$15 = 3 + 5 + 7$$

Číslo 3 proto musí být umístěno někde ve středu strany. Budeme-li v tomto rozkládání čísla 15 pokračovat, zjistíme, že všechna čísla jsou právě ve dvou nebo právě ve třech rozkladech, pouze číslo 5 je právě ve čtyřech rozkladech.

$$\begin{aligned} 15 &= 5 + 1 + 9 \\ 15 &= 5 + 2 + 8 \\ 15 &= 5 + 3 + 7 \\ 15 &= 5 + 4 + 6 \end{aligned}$$

Číslo 5 proto musí být i při tomto požadovaném přeskupení stále uprostřed čtverce. Tam se totiž „protíná“ řádek, sloupec a obě diagonály. Na závěr vytváření všech možných rozkladů čísla 15 můžeme říci:

- Čísla $2, 4, 6, 8$ musí být umístěna v rozích.
- Čísla $1, 3, 7, 9$ musí být umístěna mezi nimi.
- Číslo 5 musí být umístěno uprostřed čtverce.

Nyní můžeme zkoušet vkládat uvedená čísla na příslušná pole a ověřovat, zda vyšel magický čtverec. Uděláme-li několik takových experimentů, jistě si uvědomíme zákonitost, jak čísla do čtverce umístit. Jedno takovéto rozmístění je znázorněno na obr. 3.

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Obrázek 3

Čtenář si může překontrolovat, zda opravdu všechny požadované součty jsou 15. Jsou ještě nějaká další řešení? Protože čtverec má celkem 8 shodností (4 osové souměrnosti a 4 otočení zahrnující i identitu), můžeme pomocí nich z našeho čtverce sestrojit ještě 7 dalších magických čtverců. Toto však již přenecháme čtenáři.

Úloha 2. Nyní, když jsme problém vyřešili, můžete odpovědět na otázku: Kolik tlačítek musíte přemístit, abyste dostali „magickou“ klávesnici? Odpovězte, než budete pokračovat ve čtení.

Odpověď: Musíme přemístit všechna tlačítka mimo prostředního tlačítka 5.

Úloha 3. Všech osm magických čtverců 3×3 má uprostřed číslo 5. Kolik dalších čísel musíte zadat a kam, aby byl čtverec jednoznačně určen? Odpovězte, než budete pokračovat ve čtení.

K **odpovědi** se můžeme dostat např. experimentováním se čtvercem na obr. 19. Musíme zadat dvě další čísla, která však nesmí ležet ve stejné diagonále, ani ve stejném řádku nebo sloupci. Navíc přitom musíme splnit výše uvedené podmínky: Pokud je číslo v rohovém čtverečku, musí být sudé a pokud je uprostřed strany, musí být liché. Ještě však musí platit, že součet těchto dvou zadaných čísel nesmí být 10. (Proč?)

Poznámka. Bylo by jistě zajímavé mít na klávesnici svého mobilu číslice uspořádané do magického čtverce, nebylo by to však pravděpodobně příliš praktické.

Výše uvedenou úlohu nyní můžete **obměňovat**. Do čtverečků můžete např. vkládat čísla 2 až 10 nebo 3 až 11 nebo např. nějakou skupinu čísel sudých nebo prvočísla. Mohli byste se pak pokusit vyslovit podmínky (alespoň nutné), které musí použitých devět čísel splňovat, aby úloha měla řešení.

Hra u kulatého stolu

Hrozen je motivován přímo základním problémem a nepožaduje téměř žádné předběžné matematické znalosti.
Hra: Dva hráči A a B mají dostatek mincí stejné velikosti, aby mohli hrát hru u kulatého stolu.
Hra má tato pravidla:

1. Hráči pokládají mince střídavě na stůl tak, aby se nepřekrývaly.
2. Hráč, který jako první nemůže položit svoji minci na stůl, prohrává.

Než začneme hrát, bylo by vhodné dohodnout se (definovat), co znamená položit minci na stůl. V podstatě jsou možné dvě definice:

a) celá jedna strana mince leží na ploše stolu,

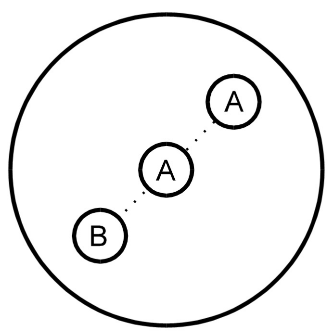
b) mince na stole „drží“ (může trochu přesahovat i přes okraj stolu).

Přijměme v celé další části definici a). Obecnější definice b) samozřejmě může vést na některých místech k jiným závěrům. Na tuto rozdílnost čtenáře upozorníme. Studenti si mohou hru zahrát a pak jim sdělíme, že ***existuje vítězná strategie*** pro hráče, který první pokládá minci na stůl. Dohodněme se, že označení první hráč a hráč A znamená totéž. Vzhledem k přijaté definici a) bychom však měli dodat, že vítězná strategie pro prvního hráče může existovat pouze tehdy, když stůl je dostatečně velký, aby se na něj vešla alespoň jedna mince[2]. V případě definice b) by tato podmínka z pochopitelných důvodů odpadla. A nyní již přistupme k základnímu problému našeho budoucího hroznu.

Základní problém: Zahrajte si hru na modelu stolu a pokuste se objevit vítěznou strategii prvního hráče (hráče A).

Poznámka. Studenti si před zadáním problému vystřihli ze čtvrtky kruhy o průměru 16 cm a přinesli si buď mince nebo nějaká stejně velká kolečka dvou barev. Problematiku jsme zkoušeli na základní a střední škole, ale i na škole vysoké. Hra zaujala nejen žáky a studenty, ale i jejich učitele. Byli jsme překvapeni, že např. i někteří z žáků šestého ročníku vítěznou strategii po určité, ne příliš dlouhé době objevili. Dodejme však, že zdaleka ne všichni řešitelé z řad dětí, ale i dospělých, byli při objevování vítězné strategie úspěšní. Proto zdůrazněme, že pokud někdo vítěznou strategii neobjeví, pak mu ji musíme sdělit nebo lépe, musíme ho k ní dovést. Tato skutečnost mu však nikterak nebrání, aby se aktivně zúčastnil pozdějšího vytváření nových problémů a jejich řešení. Než však k tomu může dojít, musí mít dostatek času, aby metodu řešení základního problému skutečně pochopil.

Řešení. Hráč A položí svoji první minci do středu stolu a každou další minci vždy středově souměrně s mincí svého protihráče. Touto strategií si zajistí, že může položit minci vždy, když ji může položit protihráč B (viz obr. 4).



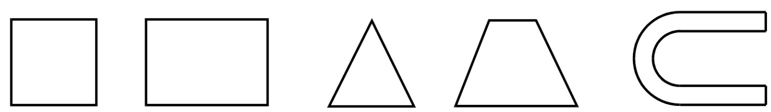
Obrázek 4

[2]Tato podmínka bude normálním lidem připadat přinejmenším podivná, neboť stoly obvykle tuto podmínku splňují. My ji však vyslovit musíme, neboť se chováme tak, jak se v matematice sluší.

Tím končí první fáze naší metody a můžeme proto přistoupit k fázi druhé. Zopakujme, že v této fázi buď sami nebo lépe, ve spolupráci se studenty vytváříme pomocí základního problému problémy nové a snažíme se je vyřešit pomocí již známé vítězné strategie prvního hráče. V tomto demonstračním příkladě však nebudeme jednotlivé problémy přímo vypisovat. Spíše se zaměříme na to, abychom ukázali několik možných skupin těchto nových problémů.

První variace základního problému: změna tvaru stolu

Co se stane s vítěznou strategií prvního hráče, pokud ke hře užijeme stůl jiného tvaru. Může to být postupně stůl čtvercový, obdélníkový, trojúhelníkový, lichoběžníkový, stůl ve tvaru podkovy atd. (viz obr. 5).



Obrázek 5

Řešení. Úlohu řešíme pro každý stůl zvlášť a potom získané poznatky zobecníme. Vítězná strategie prvního hráče je zřejmě použitelná pro každý středově souměrný stůl.

Druhá variace základního problému: deska stolu s otvory

Počet otvorů může být různý a také jejich rozmístění. Zabývejme se zde jenom nejjednodušší situací, kdy středově souměrný stůl má jeden kulatý otvor, a to právě uprostřed (např. zahradní stůl s otvorem pro slunečník). Co se v tomto případě stane s vítěznou strategií prvního hráče?

Řešení. Vítězná strategie z prvního hráče přechází tentokrát na druhého hráče. Poznamenejme, že v případě výše uvedené definice b) by záleželo na velikosti uvažovaného otvoru.

Třetí variace základního problému: více stolů

Hrajte naší hru na větším počtu středově souměrných stolů. Existuje vítězná strategie pro některého z hráčů?

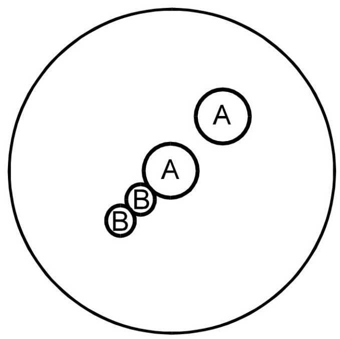
Řešení. Jestliže máme $(1), 3, 5, \ldots$ (obecně lichý počet) středově souměrných stolů, pak existuje vítězná strategie pro prvního hráče. Řešíme nejprve pro několik prvních případů a potom zobecníme. Jestliže máme $2, 4, 6, \ldots$ (obecně sudý počet) středově souměrných stolů, pak existuje vítězná strategie pro druhého hráče. Opět řešíme nejprve pro několik prvních případů a potom zobecníme.

Čtvrtá variace základního problému: mince různé velikosti
Co se stane s vítěznou strategií hráče A, jestliže hráči mají mince různé velikosti? Nechť má

a) hráč A větší mince než hráč B,

b) hráč B větší mince než hráč A.

Řešení. V případě a) nelze použít vítěznou strategii hráče A, neboť hráč B může snadno vytvořit situaci, kdy hráč A postupující podle této strategie nemůže položit svojí minci (viz např. situace na obr. 6) V případě b) je vítězná strategie hráče A použitelná.



Obrázek 6

Jistě by bylo možné vymyslet další variace základního problému, ale na první ukázku to patrně bohatě stačí. Čtenářově aktivitě však nechceme nikterak bránit, právě naopak.

Literatura

[1] KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice.* 1. vyd. Ústí nad Labem: UJEP, 1999.

[2] KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice.* 1. vyd. Ružomberok: Katolická Univerzita, 2005.

Vytváření matematické teorie

Jan Kopka
katedra matematiky Přírodovědecké fakulty UJEP, jan.kopka@ujep.cz

Číselné tabulky

Uspořádání čísel do určitých geometrických obrazců je vhodnou situací pro zkoumání. My se zde budeme zabývat čtvercovou tabulkou.
Co z matematiky předpokládáme? Předpokládáme znalost trojúhelníkových čísel, tj. čísel $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$, a vzorce pro výpočet n-tého trojúhelníkového čísla T_n, tj.

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Tento vzorec lze objevit např. experimentováním.
Problematiku můžeme využít např. při probírání aritmetických posloupností nebo při úpravách algebraických výrazů.

Problém 3. Uvažujme číselnou tabulku 1.

1	2	3	4	5	6	…
2	4	6	8	10	12	…
3	6	9	12	15	18	…
4	8	12	16	20	24	…
5	10	15	20	25	30	…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Tabulka 1

Úkol: Nejprve si pozorně prohlédněte, jak tabulka vznikla, a potom pokračujte ve čtení.

a) **Zkoumejte** součty čísel v takových čtvercích, jako jsou vyznačené v tabulce 1.
Např. součet v druhém nejmenším čtverci je $1 + 2 + 2 + 4 = 9$.

b) **Zkoumejte** součty čísel v „koridorech“ mezi sousedními čtverci.
Např. součet čísel v koridoru za druhým čtvercem je $3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$.

Řešení:

a) **Experimentování** (systematické):
Součty čísel ve čtvercích (od nejmenšího) jsou po řadě:

$C_1 = 1$
$C_2 = (1 + 2) + (2 + 4) = 3 + 6 = 9$
$C_3 = (1 + 2 + 3) + (2 + 4 + 6) + (3 + 6 + 9) = 6 + 12 + 18 = 36$
$C_4 = (1 + 2 + 3 + 4) + \ldots + (4 + 8 + 12 + 16) = 10 + 20 + 30 + 40 = 100$

Je vidět, že jako součty dostáváme některá čtvercová čísla

$$C_1 = 1 = 1^2, C_2 = 9 = 3^2, C_3 = 36 = 6^2, C_4 = 100 = 10^2.$$

Jsou to druhé mocniny trojúhelníkových čísel. Pomocí induktivní úvahy proto můžeme vyslovit:

Hypotéza. Pro libovolné přirozené číslo n platí: součet čísel v n-tém čtverci je druhou mocninou n-tého trojúhelníkového čísla. Symbolicky: $(\forall n \in \mathrm{N}) C_n = (T_n)^2$.

Důkaz. Uvažujme n-tý čtverec. Čísla v tomto čtverci nějakým způsobem sečteme. Zvolíme sečtení po řádcích. Platí:

Součet čísel v prvním řádku	$R_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Součet čísel ve druhém řádku	$R_2 = 2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = 2T_n$.
	$\vdots$
Součet čísel v n-tém řádku	$R_n = n + 2n + 3n + \ldots + n \cdot n = nT_n$.

Součet všech čísel ve čtverci C_n:

$$C_n = T_n + 2T_n + 3T_n + \ldots + nT_n = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)T_n = T_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

$\square$

C_n je tedy skutečně druhou mocninou n-tého trojúhelníkového čísla. Vyslovená hypotéza se tak stává větou. Vyslovme ji ještě jednou:

Věta 8. *Uvažujme číselnou tabulku 1 a v ní vyznačený typ čtverců. Pro libovolné nenulové přirozené číslo n platí, že součet všech čísel v n-tém čtverci je:*

$$C_n = T_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Tak např. součet čísel v pátém čtverci $C_5 = T_5^2 = 15^2 = 225$.

b) **Experimentování** (systematické):
Je vhodné (aby formulace budoucího objevu byla co nejjednodušší – to však student pozná až později) vzít za nejmenší koridor nejmenší čtvereček (koridor mezi nultým a prvním čtvercem), tzn., že $K_1 = 1$.
Součty čísel v dalších koridorech jsou po řadě:

$$K_2 = 2 + 4 + 2 = 8$$
$$K_3 = 3 + 6 + 9 + 6 + 3 = 27$$
$$K_4 = 4 + 8 + 12 + 16 + 12 + 8 + 4 = 64$$
$$K_5 = 5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 20 + 15 + 10 + 5 = 125$$

Vidíme, že jsme dostali kubická čísla

$$K_1 = 1 = 1^3,\ K_2 = 8 = 2^3,\ K_3 = 27 = 3^3,\ K_4 = 64 = 4^3,\ K_5 = 125 = 5^3.$$

Opět jako po předchozím experimentování můžeme pomocí induktivní úvahy vyslovit:

Hypotéza. Pro libovolné nenulové přirozené číslo n je součet čísel v n-tém koridoru n-té kubické číslo.
Symbolicky: $(\forall n \in \mathrm{N})\ K_n = n^3$.

Důkaz. Nechť n je libovolné nenulové přirozené číslo. Pak součet čísel v n-tém koridoru je:

$$\begin{aligned} K_n &= n + 2n + 3n + \ldots + (n-1)n + n \cdot n + (n-1)n + \ldots + 3n + 2n + n \\ &= 2n + 4n + 6n + \ldots + 2(n-1)n + n \cdot n \\ &= 2n(1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1)) + n^2 = 2^n \frac{n(n-1)}{2} + n^2 = n^3 - n^2 + n^2 \\ &= n^3. \end{aligned}$$

□

Nyní můžeme hypotézu přejmenovat na větu.

Věta 9. *Uvažujme číselnou tabulku 1 a v ní vyznačené koridory. Pro libovolné přirozené číslo n platí, že součet čísel v n-tém koridoru je $K_n = n^3$.*

Nyní můžeme obě získané věty využít. Protože víme, že platí: $K_1 + K_2 + \ldots + K_n = C_n$, a o koridorech hovoří věta 2, zatímco o čtvercích věta 1, můžeme pomocí deduktivní úvahy získat následující větu:

Věta 10. *Pro libovolné nenulové přirozené číslo n platí, že součet prvních n kubických čísel je roven čtverci n-tého trojúhelníkového čísla. Symbolicky:*

$$(\forall n \in \mathrm{N}) 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = T_n^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 .$$

Znovu zdůrazněme, že první dvě věty jsme objevili pomocí experimentování a následující indukční úvahy, zatímco třetí větu jsme objevili pomocí dedukce použité na uvedené věty.
Toto je miniukázka rozvíjení matematické teorie.

Literatura

[1] KOPKA, J. *Hrozny problémů ve školské matematice.* 1. vyd. Ústí nad Labem: UJEP, 1999.

[2] KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice.* 1. vyd. Ružomberok: Katolická Univerzita, 2005.

Abakus – tak trochu jiné počítadlo

Lucie Loukotová
KMA PřF UJEP, lucie.loukotova@ujep.cz

Snad každý z nás se setkal s pomůckou usnadňující první matematické krůčky – počítadlem. Pravděpodobně také nikoho nepřekvapí, že počítadlo není pouze evropskou záležitostí, ale že jeho používání sahá daleko za hranice našeho kontinentu. Cílem článku je seznámit s východoasijskou variantou počítadla – abakem. Není bez zajímavosti, že v oblasti Číny a Japonska se lze s abakem setkat i mimo půdu základních škol, např. v obchodech, kde mnohdy úspěšně konkuruje kalkulačkám.

Tento příspěvek navazuje na pracovní dílnu pro žáky základních škol konanou v rámci Letní školy matematiky a fyziky.

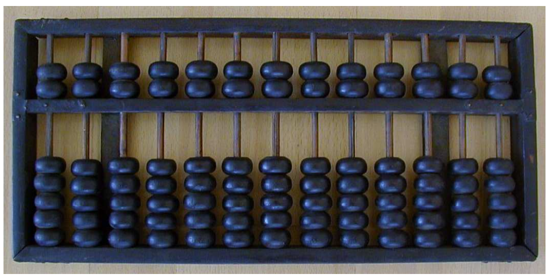
1 Abakus a jeho historie

Vznik abaku je těsně spjat s objevem poziční číselné soustavy. K usnadnění výpočtů v pozičních soustavách nejprve sloužily tzv. *počítací desky*, což byly obvykle rovné kameny pokryté vrstvou písku, v němž byly vyznačeny rýhy. Do rýh se vkládaly kaménky podle hodnoty čísla, které měly určovat. Postupně byly počítací desky nahrazeny dřevěným rámem s korálky navlečenými na drátu nebo niti – abaky v dnešním slova smyslu.

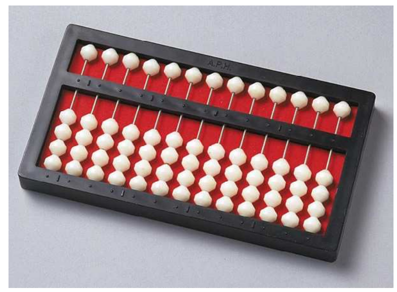
V současné době se můžeme setkat se třemi základními typy abaků. Prvním z nich je *suanpan*, který vznikl ve 12. století v Číně. Celý rám je příčkou rozdělen na dvě části, přičemž horní obsahuje dva korálky (každý z nich má hodnotu pět jednotek) a dolní pět korálků (hodnotou po jedné jednotce). Někdy se označuje jako abakus 2/5.

V 17. století byla ze suanpanu odvozena japonská varianta abaku – *soroban*. Od suanpanu se soroban se liší v počtu korálků, horní část obsahuje pouze jeden korálek (má hodnotu pěti jednotek), dolní pak čtyři korálky (každý z nich určuje jednu jednotku). Tento typ je také známý pod názvem abakus 1/4.

Poslední variantou je ruský *sčot*, který vznikl v 17. století. Na rozdíl od předchozích neobsahuje prostřední příčku. Jednotlivé typy abaků můžeme vidět na obrázku 1.



(a) suanpan



(b) soroban

(c) sčot

Obrázek 1: Druhy abaků

V tomto textu se budeme zabývat výhradně japonskou variantou abaku – sorobanem. Podrobné pojednání o suanpanu lze najít např. v [2].

2 Jak vyrobit abakus

Sehnat abakus je v našich zeměpisných šířkách poměrně obtížné, proto zde uvedeme několik tipů k jeho výrobě. Žákům na druhém stupni samotná výroba zabere maximálně tři čtvrtě hodiny až hodinu.

Ještě než se pustíme do práce, seznamme se s několika základními parametry sorobanu. Japonské abaky mají vždy lichý počet sloupců s korálky, nejčastěji jich je 13, ale můžeme se setkat i s 21, 23, 27 nebo dokonce 31 sloupci. Pro naše účely stačí abakus se sedmi sloupci, který nám umožní počítat v řádu milionů. Jak již bylo řečeno v předchozí kapitole, rám sorobanu je rozdělen příčkou na dvě nestejně velké části. Horní, menší, obsahuje jeden korálek, dolní, větší pak čtyři korálky. Abaky se nejčastěji vyráběly ze dřeva, dnes se však můžeme setkat i s jinými materiály, jako je umělá hmota či kámen.

Pro výrobu našeho abaku budeme potřebovat lepenkovou krabici (na velikosti nezáleží, rozstříháme ji na pruhy), korálky z libovolného materiálu (vhodnější jsou větší s velkými otvory), provázek (silný podle velikosti otvoru korálku), izolepu, nůžky, děrovačku, popřípadě kružítko.

Lepenkovou krabici seženeme v každém supermarketu, jedna vystačí pro výrobu několika abaků. Vhodné korálky při troše štěstí koupíme v hračkářství nebo ve výtvarných potřebách. Provázek musí mít dostatečnou délku, navíc je lepší, pokud po něm korálky nebudou volně klouzat, volme tedy odpovídající sílu.

Abakus potom vytvoříme podle následujícího obrázku.

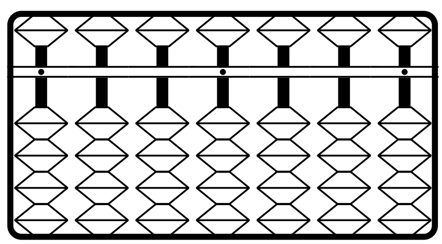
K samotné výrobě uveďme je pár poznámek. Velikost rámu se řídí použitými korálky. Pro abakus na obrázku byly použity korálky o průměru 0,75 cm, rám pak má rozměry 15 × 8 cm, výška rámu je 2 cm. Rám vytvoříme z proužku vystřiženého z lepenkové krabice a zohýbaného do tvaru obdélníka. Dále vlepíme příčku tak, aby rám dělila přibližně v poměru 1:2. Blíže hornímu okraji rámu pomocí děrovačky vytvoříme otvory, kterými provlékneme provázek s korálky.

Pro ty, kteří abakus vyrábět nechtějí, můžeme doporučit množství aplikací dostupných na internetu, namátkou vybíráme [3] nebo [4].

Obrázek 2: Vyrobený abakus

3 Jak pracovat s abakem

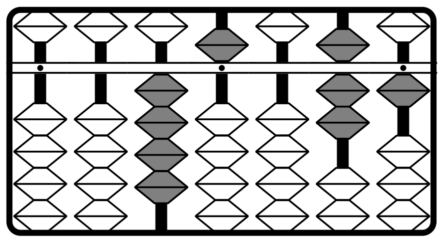
Abakus máme hotový a můžeme se pustit do práce s ním. Před každým výpočtem je nutné abakus „vynulovat“, tj. posunout všechny korálky od prostřední příčky ke krajům. Abakus připravený k výpočtům znázorňuje obr. 3.



Obrázek 3: Základní pozice

Znovu připomeňme, že korálky nad prostřední příčkou mají hodnotu pěti jednotek, zatímco každý z korálků pod prostřední příčkou značí jednu jednotku. Náš abakus má celkem sedm sloupců s korálky. Zleva doprava tyto sloupce označují miliony, statisíce, desetitisíce, tisíce, stovky, desítky, jednotky. Pro zjednodušení práce s abakem jsou sloupce milionů, tisíců a jednotek označeny tečkou na prostřední příčce.

Pokusme se na abaku nastavit číslo 45071. Hned od začátku si snažme osvojit základní pravidlo práce s abakem – postupovat vždy zleva doprava. Na pozici desetitisíců je čtyřka, tudíž přisuneme 4 jednotkové korálky k prostřdní příčce. Tisíců je v našem čísle pět, pro vyjádření pětky ale nemáme dostatek jednotkových korálků, proto přisuneme pětkový korálek na pozici tisíců k prostřední příčce. Na pozici stovek je v čísle 0, stovkový sloupec tedy zůstane beze změny. Na pozici desítek máme sedmičku, kterou vyjádříme jako součet $2 + 5$, k prostřední příčce musíme přesunout dva jednotkové korálky a jeden pětkový. Konečně, na místě jednotek je jednička, přisuneme proto jeden jednotkový korálek k prostřední příčce. Pokud jsme postupovali správně, abakus by měl odpovídat obrázku 4.



Obrázek 4: Nastavení čísla 45071

Tímto způsobem lze na abaku nastavit libovolné číslo.

4 Sčítání

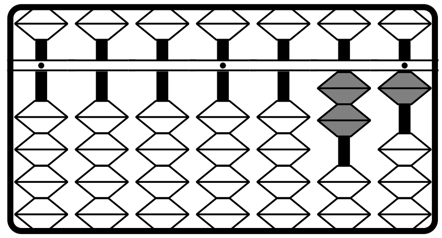
Na abaku můžeme poměrně snadno sčítat a odčítat přirozená čísla[1]. Násobení a dělení je už poněkud obtížnější, přesto k němu stačí znát malou násobilku. Zkušení počtáři pak mohou pomocí abaku určovat i druhé a třetí odmocniny. V tomto textu se zaměříme na sčítání přirozených čísel, informace k ostatním operacím nalezne čtenář v [1].

4.1 Základní postupy

Základní techniky využité při sčítání se naučíme na konkrétních příkladech. Při veškerých výpočtech budeme postupovat zleva doprava.

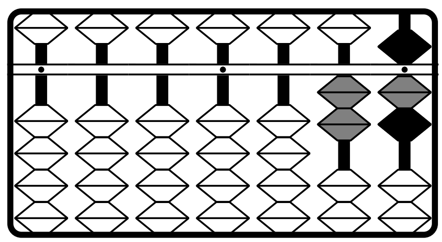
Nastavme na abaku číslo 21 (viz obr. 5).

[1] Ve skutečnosti můžeme na abaku pracovat i s celými či racionálními čísly, podrobnosti najdeme v [1].



Obrázek 5: Vyjádření čísla 21

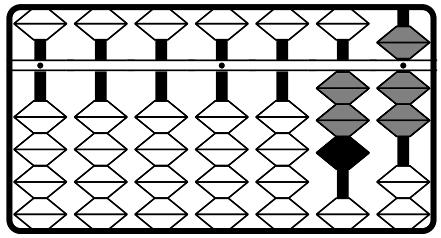
Naším úkolem je k tomuto číslu přičíst 6. To uděláme velmi snadno. Šestku rozložíme na součet $1 + 5$ a na pozici jednotek přisuneme do blízkosti prostřední příčky jeden jednotkový a jeden pětkový korálek. Výsledek 27 by měl odpovídat obrázku 6.



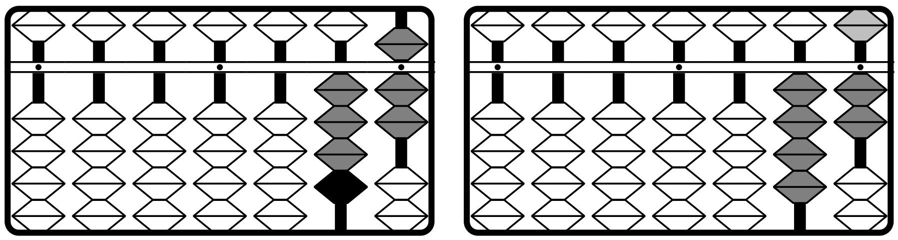
Obrázek 6: Přičteme 6, výsledkem je 27

Nyní k číslu 27 přičtěme 15. Protože postupujeme zleva doprava, začneme s pozicí desítek – přisuneme jeden jednotkový korálek blíže ke střední příčce. Abakus nyní znázorňuje číslo 37 (viz obr. 7).
Zbývá přičíst 5 na pozici jednotek. Pro tuto operaci nemáme dostatek korálků, proto si pomůžeme malým trikem. Protože pětku lze zapsat také jako $10 - 5$, přičteme 1 na pozici desítek (jedna desítka znemaná totéž jako deset jednotek) a naopak odečteme 5 na pozici jednotek. V praxi to znamená přisunutí jednoho jednotkového korálku blíže k prostřední příčce na pozici desítek a odsunutí jednoho pětkového korálku od prostřední příčky na pozici jednotek. Celou situaci ilustrují obrázky 8(a) a 8(b)[2].
S trikem, použitým v předchozím výpočtu, se budem setkávat velmi často,

[2]Zaveďme úmluvu, že v obrázcích bude černý korálek znamenat přičtení a světle šedý korálek naopak odečtení.



Obrázek 7: Přičteme 10, výsledkem je 37



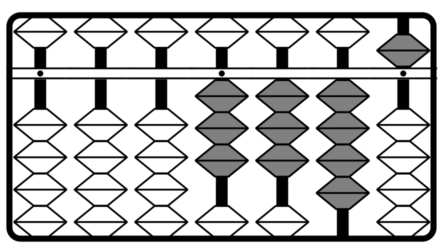
(a) Nejprve přičteme 10 . . . (b) potom odečteme 5

Obrázek 8: Příčítáme 5, výsledkem je 42

a to při práci na libovolné pozici abaku. Nyní přejděme ke složitějším výpočtům.

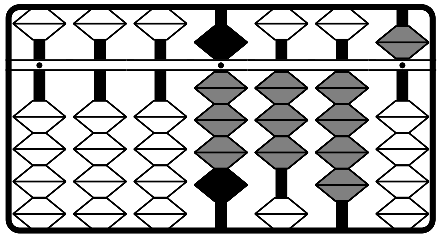
4.2 Složitější příklad

Naším úkolem je vypočítat 3345 + 6789. Na abaku nastavíme 3345 (viz obr. 9).



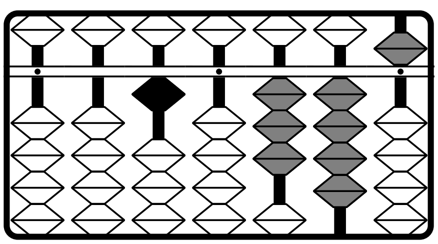
Obrázek 9: Nastavení čísla 3345

Opět postupujeme zleva doprava. Na pozici tisíců přičteme 6. Situace odpovídá obrázku 10, dostáváme číslo 9345.

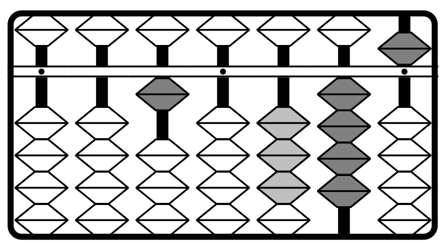


Obrázek 10: Přičítáme 6 na pozici tisíců, dostáváme 9345

Nyní přičteme 7 na pozici stovek. Protože na tuto operaci nemáme dostatek korálků, přičteme nejprve 10 a poté odečteme 3. Protože na pozici tisíců jsou všechny korálky u prostřední příčky (tj. je zde nastaveno číslo 9), přičtením 1 se dostáváme na pozici desetitisíců – zde přisouváme jeden korálek k prostřední příčce – a na pozici tisíců naopak odsouváme všechny korálky od prostřední příčky. Nesmíme zapomenout odečíst 3 na pozici stovek, dostáváme tak číslo 10045. Abakus je nyní nastaven jako na obrázku 11(b).



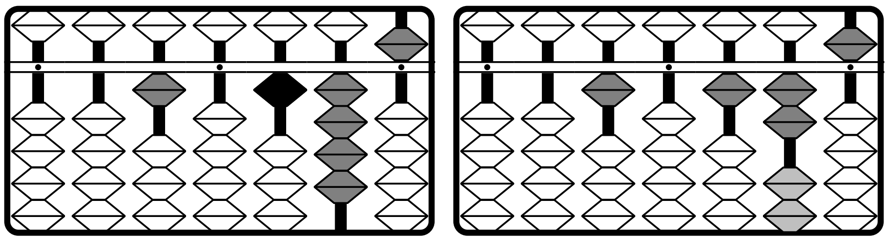
(a) Přičteme 10 na pozici stovek . . .



(b) odečteme 3 na pozici stovek

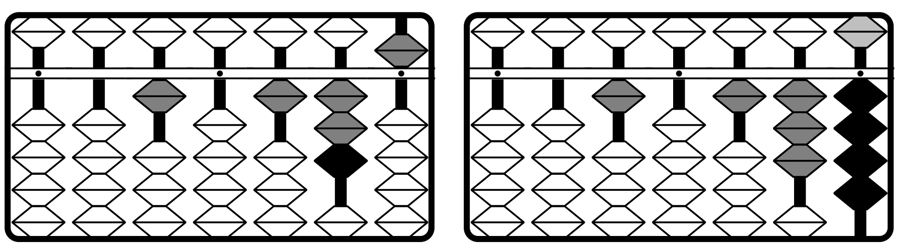
Obrázek 11: Příčítáme 7 na pozici stovek, dostáváme 10045

Přičteme 8 na pozici desítek. Opět musíme nejdříve přičíst 10 a následně odečíst 2, vysledkem je číslo 10125. Postup znázorňují obrázky 12(a) a 12(b). Posledním krokem je přičtení 9 na pozici jednotek. Opět si musíme pomoci přičtením 10 a odečtením 1. Při přicítání jedničky musíme nejprve odsunout korálek zmamenající pět jednotek od prostřední příčky a poté přisunout čtyři jednotkové korálky k prostřední příčce. Pokud jsme pracovali správně, bude abakus odpovídat obrázku 13(b), výsledkem je 10134.



(a) Přičteme 10 na pozici desítek ... (b) odečteme 2 na pozici desítek

Obrázek 12: Příčítáme 8 na pozici desítek, dostáváme 10125



(a) Přičteme 10 na pozici jednotek ... (b) odečteme 1 na pozici jednotek

Obrázek 13: Příčítáme 9 na pozici jednotek, dostáváme 10134

1 Závěr

Práce s abakem může přinést příjemné zpestření hodiny matematiky. Přesto se určitě setkáme s námitkou, že počítání na abaku je zdlouhavé. Opak je pravdou, chce to ale trochu cviku. Ukázku toho, jak rychlí můžeme při práci s abakem být, najdeme např. na YouTube ([5]).

Reference

[1] BERNAZZANI, D. *Soroban Abacus Handbook.* [cit. 25. listopadu 2011]. Dostupné z: http://webhome.idirect.com/∼totton/soroban/THE ABACUS HANDBOOK.pdf.

[2] PRECLÍK, J. *Abakus.* [cit. 25. listopadu 2011]. Dostupné z: http://www.gymnachod.cz/∼preclik/download/abakus.pdf.

[3] *Abacus na wolfram.com*. [cit. 25. listopadu 2011]. Dostupné z: http://demonstrations.wolfram.com/Abacus/.

[4] *Virtual Abacus na wolfram.com*. [cit. 25. listopadu 2011]. Dostupné z: http://demonstrations.wolfram.com/VirtualAbacus/.

[5] *Abakus ve škole*. [cit. 4. srpna 2011]. Dostupné z: http://www.youtube.com/watch?v=Ss0qcaCjx80&feature=related.

Apolloniovy a Pappovy úlohy (a GeoGebra)

Ivana Machačíková, Josef Molnár
Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť, machacikova@gymzl.cz
Univerzita Palackého v Olomouci, josef.molnar@upol.cz

Hledáte zajímavé téma na procvičení konstrukčních úloh? Pak sáhněte po Apolloniových a Pappových úlohách! K zadání šestnácti úloh stačí tři písmena a dvě závorky, při jejich řešení se zopakují nejen množiny bodů dané vlastnosti, shodná zobrazení a stejnolehlost, ale použije se též mocnost bodu ke kružnici a kruhová inverze (případně cyklografie aj.) Při hledání počtu řešení jednotlivých úloh je potřeba prokázat rozvinutou geometrickou představivost i kombinatorické schopnosti.

Apolloniovy úlohy jsou pojmenovány podle starověkého řeckého geometra a matematika Apollonia z Perge (262–190 př. n. l.). Obecná Apolloniova úloha zní: „Sestrojte všechny kružnice, které se dotýkají tří daných kružnic.“ Nahradíme-li v této úloze některé z daných kružnic přímkou nebo bodem, získáme celkem deset úloh. Označíme-li v jejich zadání dané body B, dané přímky p a dané kružnice k, můžeme všech deset Apolloniových úloh zapsat takto: $BBB, BBp, BBk, ppp, ppB, ppk, kkk, kkB, kkp, Bpk$. Při diskusi o počtu řešení předpokládáme, že žádné zadané útvary nejsou totožné a žádný zadaný bod neleží na žádné ze zadaných přímek či kružnic. Obecná Apolloniova úloha může mít až 8 řešení (viz obr. 1).

Mezi významné řecké matematiky patřil také Pappos z Alexandrie (3. stol.), podle kterého je pojmenována druhá série úloh. **Pappovy úlohy** dostáváme, pokud jedním z daných prvků je bod, který navíc leží na některé z daných kružnic (kB) nebo přímek (pB). Schematicky tyto úlohy zapisujeme takto: $(pB)B, (pB)p, (pB)k, (kB)B, (kB)p, (kB)k$. Pro diskusi opět předpokládáme, že žádné dva zadané útvary nejsou splývající a v případě, že je třetím zadaným útvarem bod, neleží tento na zadané přímce ani kružnici.

Z následujícího přehledu lze vyčíst, které úlohy se obvykle řeší užitím příslušné metody.

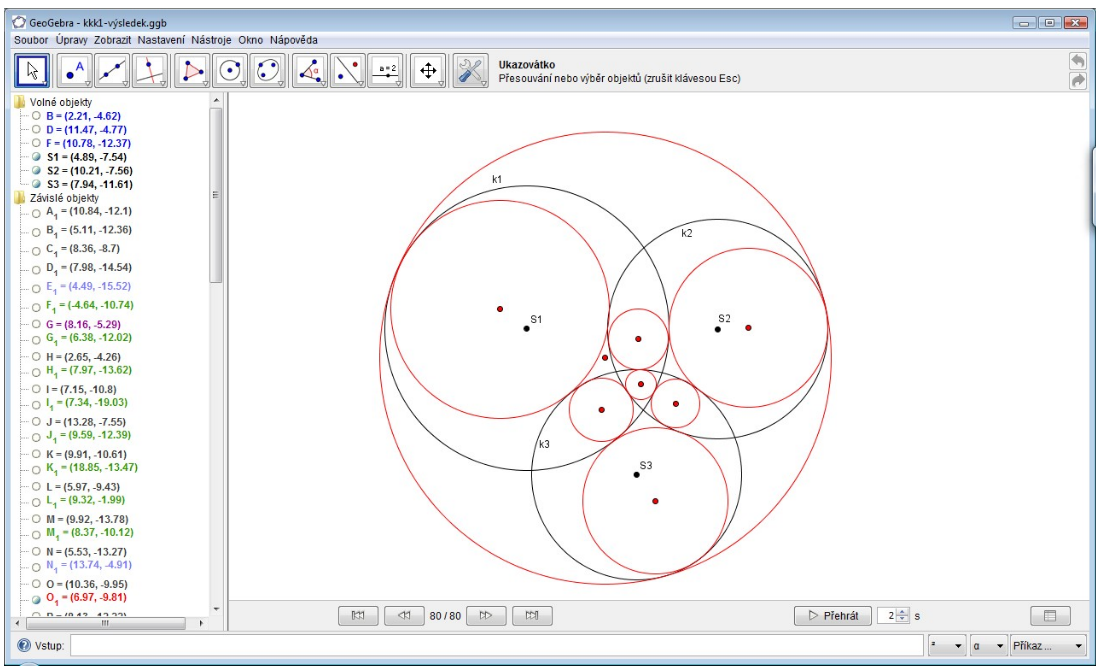
Apolloniovy úlohy řešené užitím

- množin bodů dané vlastnosti: BBB, ppp,
- stejnolehlosti: ppB, ppk,
- mocnosti bodu ke kružnici: BBp, BBk,

- kruhové inverze: $kkB, kkp, kkk, Bpk, (BBk)$.

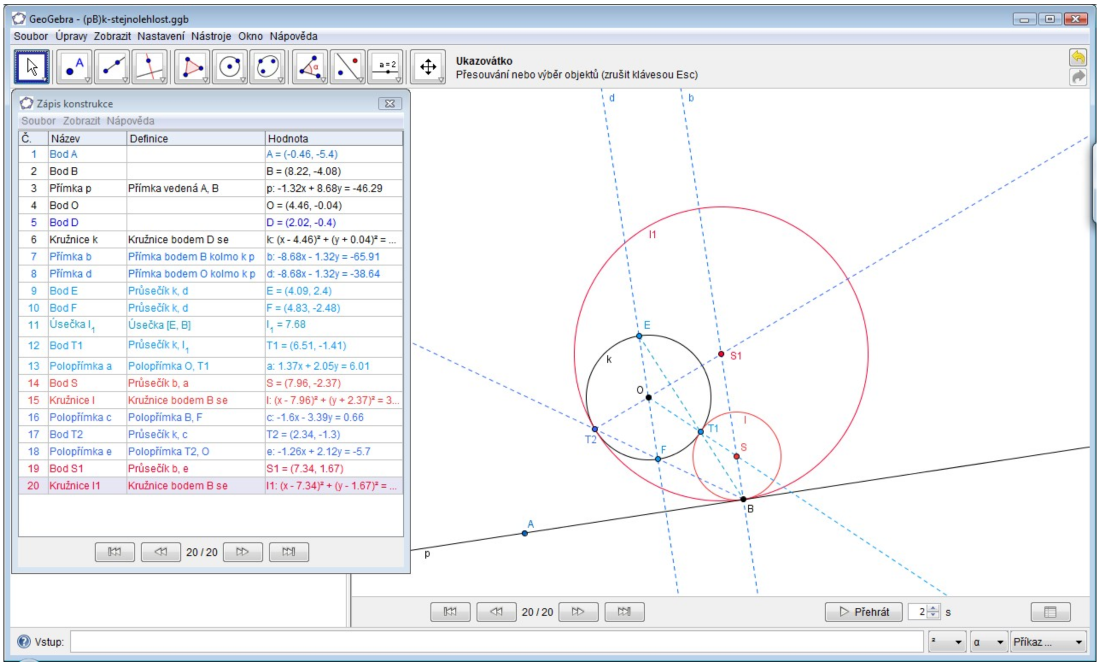
Pappovy úlohy řešené užitím

- množin bodů dané vlastnosti: $(pB)B, (kB)B, (pB)p, (kB)p$,
- stejnolehlosti: $(pB)k, (kB)k$,
- mocnosti bodu ke kružnici: $(pB)k, (kB)k$.

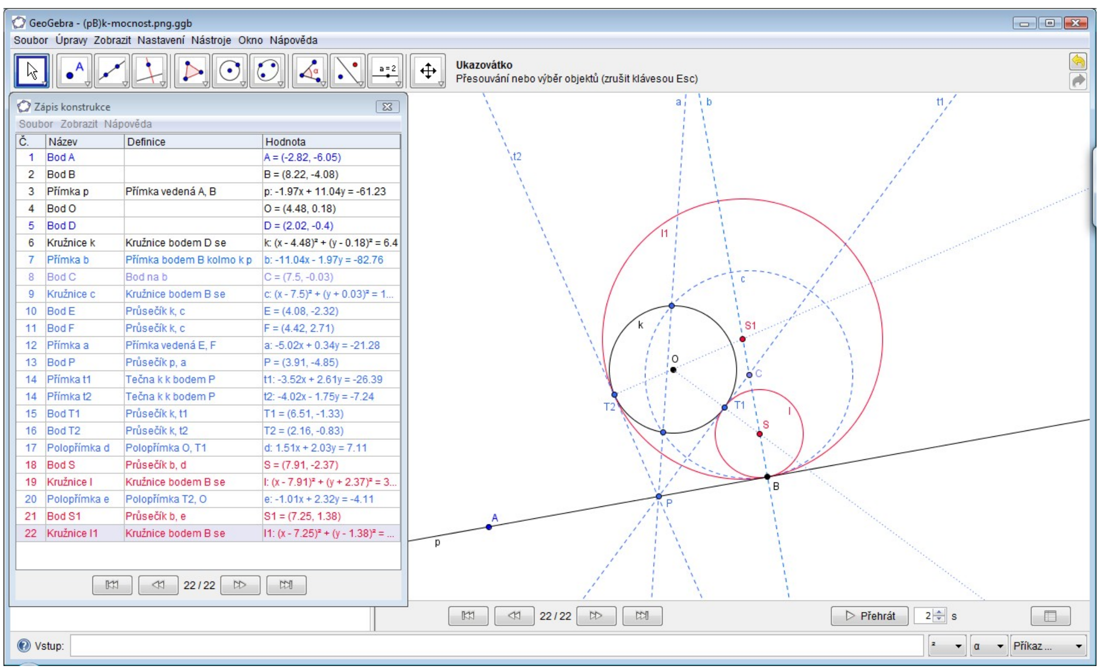


Obrázek 1

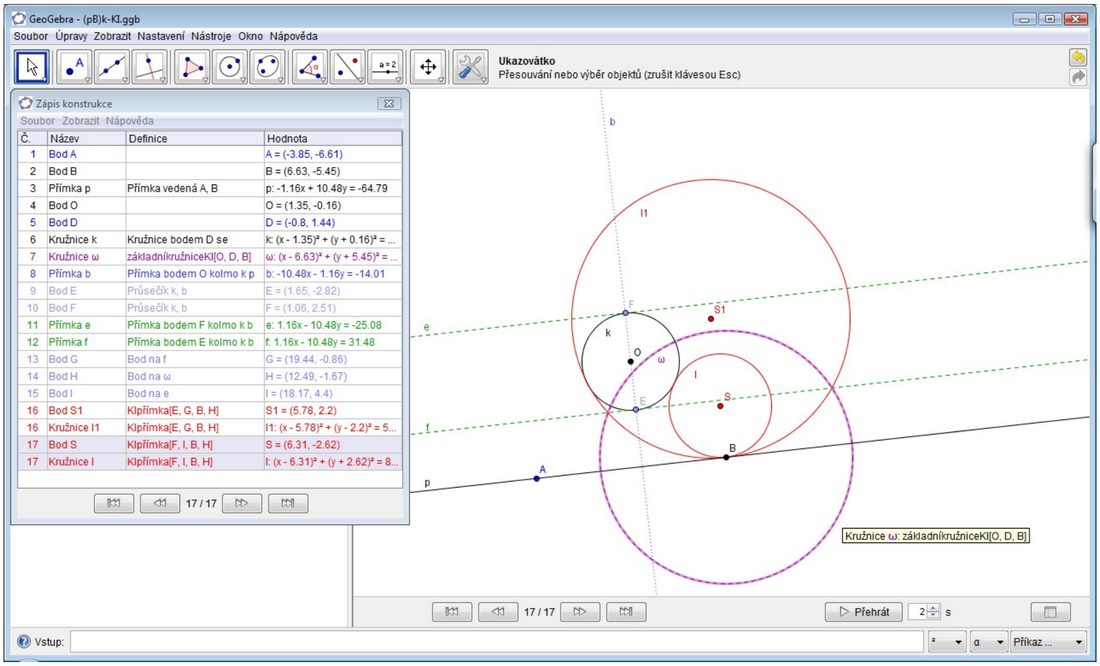
Na následujících snímcích obrazovky monitoru počítače jsou prezentovány ukázky řešení úlohy $(pB)k$ v programu GeoGebra. Pro srovnání je úloha řešena užitím stejnolehlosti (obr. 2), mocnosti bodu ke kružnici (obr. 3) a kruhové inverze (obr. 4).
Další informace o řešení úloh „klasicky“ či s využitím grafických počítačových programů můžete získat např. v níže uvedené literatuře a internetových zdrojích.



Obrázek 2



Obrázek 3



Obrázek 4

Literatura

[1] HOLUBÁŘ, J. *O metodách rovinných konstrukcí : Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné*. Praha: JČMF, 1949.

[2] MOLNÁR, J. *Matematika pro SOŠ : Planimetrie*. Praha: Prometheus, 2011.

[3] POMYKALOVÁ, E. *Matematika pro gymnázia : Planimetrie*. Praha: Prometheus, 1994.

[4] SEIFERT, L. *Cyklografie*. Praha: JČMF, 1949.

[5] ŠTALMAŠEK, J. *Geometrické konštrukcie*. Bratislava: SVTL, 1959.

[6] http://geometrie.kma.zcu.cz/work/AU/uvod/uvod.html

[7] http://planimetrie.cz

K testování geometrické představivosti

Josef Molnár
Univerzita Palackého v Olomouci, josef.molnar@upol.cz

Geometrickou představivost potřebuje každý z nás. Jak ale měřit její úroveň? V tomto článku nabízíme takovýto test (Test trojúhelníků) učitelům 1. a 2. ročníků čtyřletých středních škol, který vznikl v souvislosti s řešením projektu ESF OP VK „Práce s talenty".

Geometrii jako součást matematiky s hojnými vazbami k praxi můžeme chápat jako způsob vidění a poznávání světa, jako podtext některých filosofických směrů, jako grafickou komunikaci - způsob „zápisu" informací i jako vyučovací předmět, ve kterém se geometrická představivost rozvíjí.

Pro potřeby našich šetření vymezujeme ***geometrickou (prostorovou) představivost*** *jako soubor schopností týkajících se reprodukčních i anticipačních, statických i dynamických představ o tvarech, vlastnostech a vzájemných vztazích mezi geometrickými útvary (v prostoru).*

Didaktický „Test trojúhelníků", který je obdobou známých Rybakovových figur využívaných v subtestu Amthauerova I-S-T testu, vytvořila v rámci své disertační práce Jana Slezáková. Ověřování proběhlo v červnu 2010 v 1. a 2. ročníku vyššího gymnázia, test se skládá ze 40 úkolů - rozdělit daný nepravidelný útvar úsečkou na dvě části tak, aby z takto vzniklých částí bylo možné sestavit rovnostranný trojúhelník (viz příloha), správné řešení bylo hodnoceno jedním bodem, doba na řešení testu byla 20 minut a zúčastnilo se ho 1142 žáků (421 chlapců a 721 dívek) z fakultních škol Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého v Olomouci.

Z výsledků vyplývá, že průměrný bodový zisk činí 29,7 bodu, tj. 74,2%, že chlapci dosáhli mírně lepších výsledků než dívky a že se prokázala souvislost výsledků testu se známkou z matematiky. Budeme-li úlohy řadit podle stoupající obtížnosti, budou následovat za sebou takto: Úloha č. 14, 9, 2, 30, 3, 28, 21, 7, 33, 38, 23, 15, 25, 36, 1, 34, 27, 32, 16, 8, 5, 40, 39, 13, 4, 29, 20, 24, 18, 17, 10, 11, 22, 26, 31, 6, 12, 35, 37, 19.

Reliabilita testu byla zjišťována (Slezáková 2011) metodou půlení a (r = 0,837) a porovnávána s výsledky Testu čtverců (r = 0,812, Svoboda 2005). Pro posouzení validity bylo jako vnější kriterium zvolena známka z matematiky a k výpočtu korelace Spearmanův koeficient se závěrem, že provedené měření lze považovat za validní na hladině významnosti 0,05.

Sestavený test trojúhelníků lze tedy doporučit k určování úrovně geometrické představivosti žáků 1. a 2. ročníků gymnázií a srovnatelných středních škol.

Literatura

[1] AMTHAUER, R. a kol. *Test struktury inteligence I-S-T 2000R.* Praha: Testcentrum, 2005.

[2] GARDNER, H. *Dimenze myšlení – teorie rozmanitých inteligencí.* Praha: Portál, 1999.

[3] MOLNÁR, J. *Rozvíjení prostorové představivosti (nejen) ve stereometrii.* Olomouc: VUP, 2004 (2. rozšířené vydání 2008).

[4] MOLNÁR, J., SCHUBERTOVÁ, S. From Research on Space Imagination. *Problems of Education in the 21st Century*, 2009, 13 (13), s. 83–93.

[5] PAVLOVČINOVÁ, G. Siete kocky-prostriedok na budovanie geometrických predstáv. *Acta mathematica 11*. Nitra: UKF, 2008.

[6] PAVLOVČINOVÁ, G. Stavby z kociek a priestorové zručnosti vo vyučovaní geometrie. *Konštruktivizmus vo vyučovaní matematiky a budovanie geometrických predstáv.* Nitra: UKF, 2010.

[7] SLEZÁKOVÁ, J. *Testování geometrické představivosti (disertační práce).* Olomouc: UP, 2011.

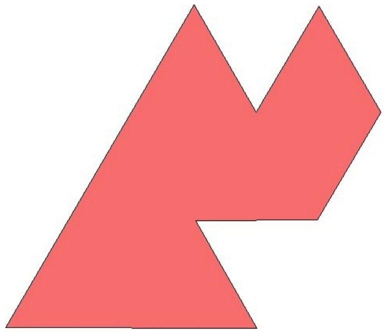
[8] SVOBODA, M. *Psychologická diagnostika dospělých.* Praha: Portál, 2005.

Příspěvek vznikl za podpory a na podporu projektu ESF OP VK CZ.1.07/1.2.08/02.0017 „Práce s talenty - Vyhledávání talentů pro konkurenceschopnost a práce s nimi.“

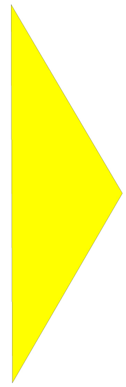
Příloha:
Test trojúhelníků

Mnohoúhelník jedním řezem rozdělte tak, aby po přemístění jedné části ke druhé (pouze v představách) vznikl rovnostranný trojúhelník.

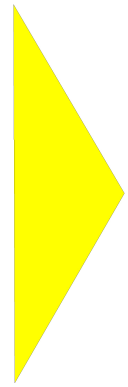
1



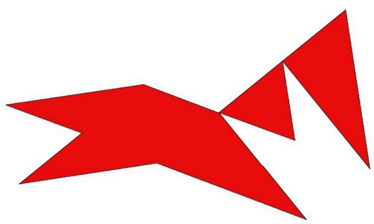
2



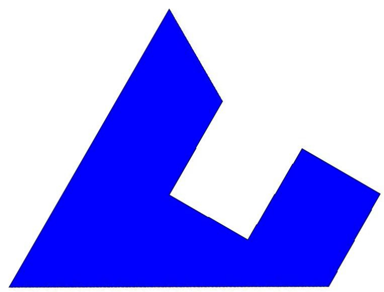
3



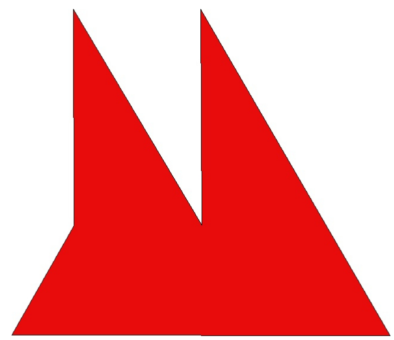
4



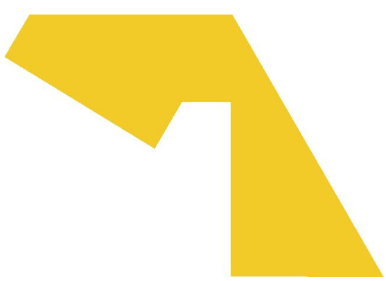
5



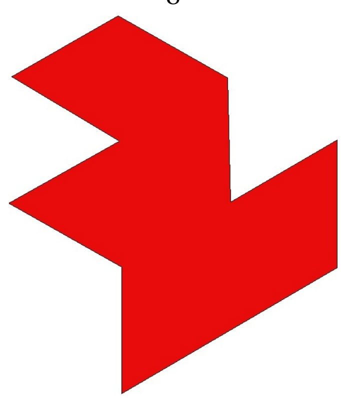
6



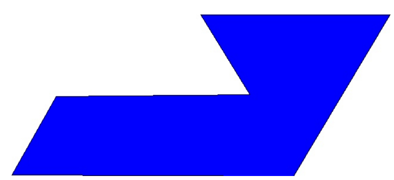
7



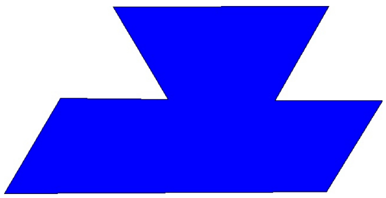
8



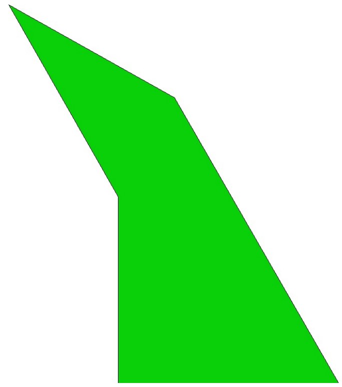
9



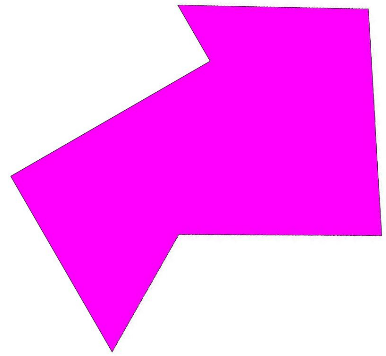
10



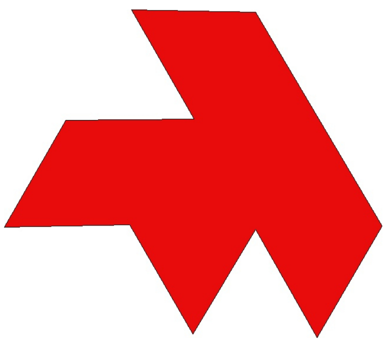
11



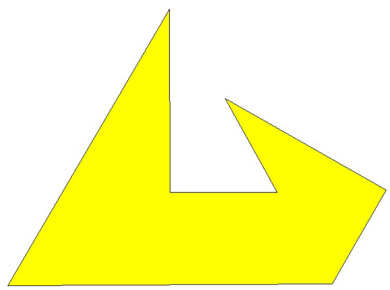
12



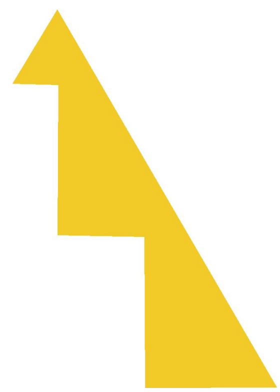
13



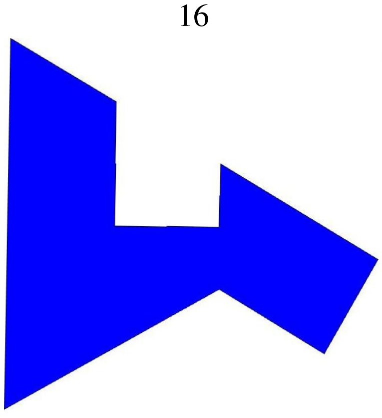
14



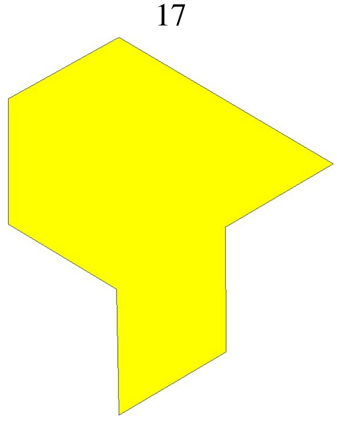
15



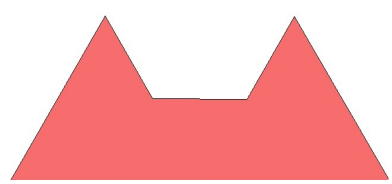
16



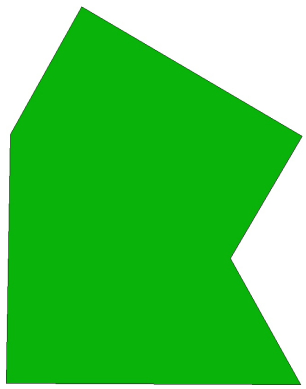
17



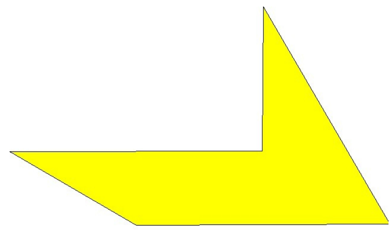
18



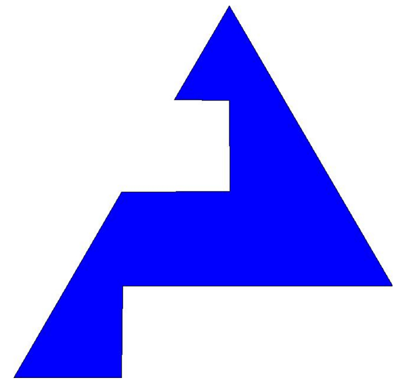
19



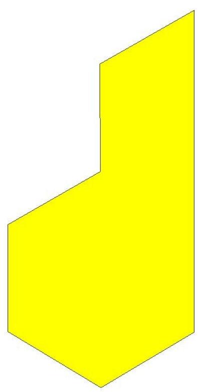
20



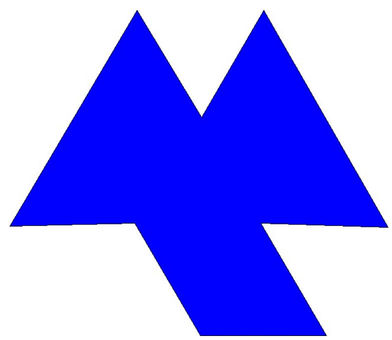
21



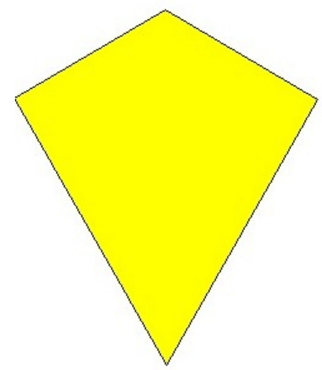
22



23



24

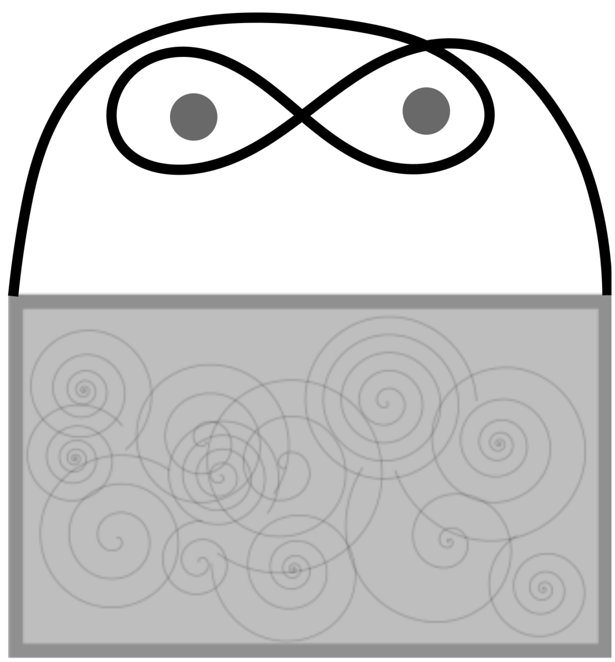


Problém věšení obrazu

Hana Bendová
KMA MFF UK, bendova@karlin.mff.cuni.cz

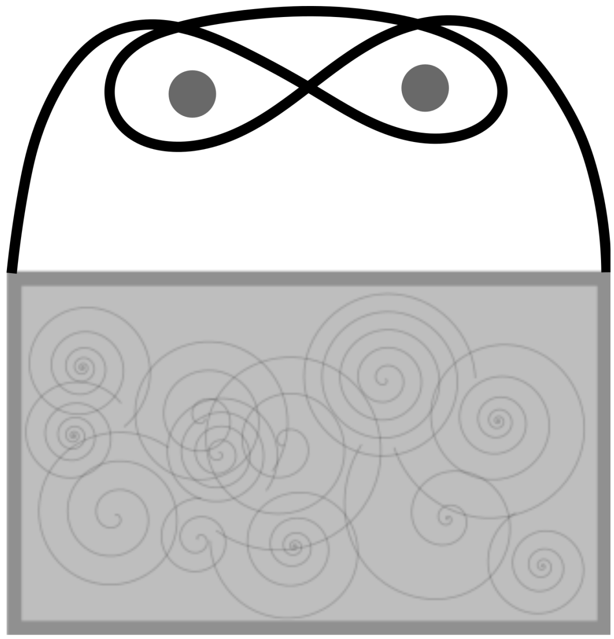
Představme si, že si chceme na hřebík zatlučený ve zdi pověsit obraz, který je vybaven k tomu určeným provázkem (upevněným konci ke dvěma jeho horním rohům). Snad každý tuší, jak se taková věc provede – přehodíme provázek přes hřebík a obraz visí. Pokud jde o výjimečně cenný obraz, u kterého bychom byli opravdu neradi, kdyby spadl, můžeme do zdi zatlouci pro jistotu ještě druhý hřebík a přehodit provázek přes oba dva. Potom i pokud se jeden z hřebíků uvolní, obraz úplně nespadne, neboť bude viset ještě na tom druhém.

Ale co když za námi přijde náš úhlavní nepřítel a poprosí nás (jakožto vyhlášené odborníky na věšení obrazů), abychom mu jeho oblíbený obraz na jeho dva hřebíky pověsili tak, aby visel co nejbezpečněji? Pouhé přehození provázku přes oba hřebíky mu zřejmě nestačí. Protože je to náš úhlavní nepřítel, zvítězí v nás po chvíli váhání zlomyslnost a začneme uvažovat: Nešlo by náhodou obraz na dva hřebíky zavěsit tak, aby to vypadalo, že bezpečně visí na obou, ale aby spadl, když uvolníme ten hřebík napravo? Že by třeba takto (obr. 1)?



Obrázek 1: Obraz visí, nicméně když se uvolní pravý hřebík, spadne.

Nešlo by to zařídit dokonce tak, že by obraz visel, ale kdyby kterýkoliv ze dvou hřebíků vypadl ze zdi, tak už by spadl? I to se nám podaří, pokud obraz zavěsíme například tímto způsobem (obr. 2).



Obrázek 2: Obraz visí, nicméně po upadnutí libovolného ze dvou hřebíků spadne.

Označme si hřebíky písmeny abecedy. Následujícím způsobem můžeme zapisovat, jak omotáváme provázek (vedoucí z levého do pravého horního rohu obrazu) kolem hřebíků: Vedeme-li provázek kolem hřebíku X po směru hodinových ručiček, zapíšeme $+X$, a vedeme-li jej proti směru hodinových ručiček, zapíšeme $-X$. Je jasné, že pokud se někde vyskytne za sebou $+X$ a $-X$ či naopak, tj. vedeme provázek kolem nějakého hřebíku po směru a hned vzápětí v protisměru hodinových ručiček či naopak, efekt těchto úkonů se po napnutí provázku vyruší. Označíme-li A a B dva hřebíky, které má náš nepřítel zatlučené do zdi, pak zavěšení z Obrázku 2 se dá popsaným způsobem zapsat jako

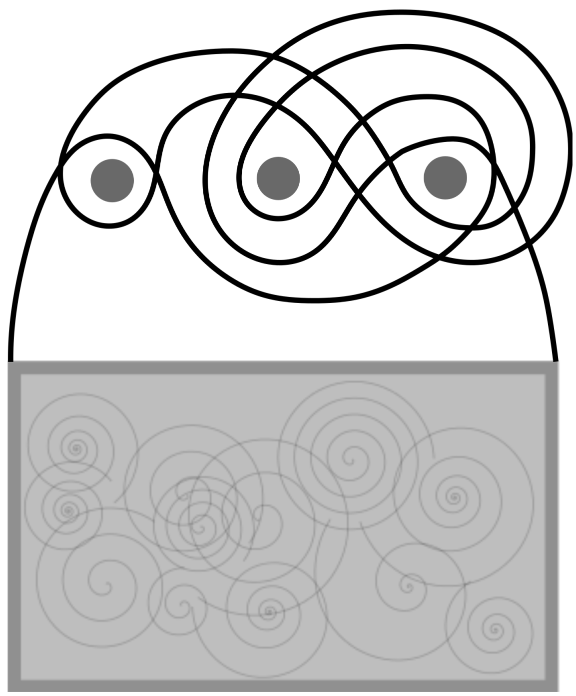
$$+A - B - A + B.$$

Pokud hřebík A ze zdi vypadne, členy $+A$ a $-A$ ve výše uvedeném výrazu zaniknou a zbyde $-B + B$. Tyto dva členy se vyruší – obraz spadne (provázek je veden kolem hřebíku B proti směru hodinových ručiček a hned nato po směru, tedy na něm vlastně nevisí). Stejně dopadneme, i když odstraníme hřebík B.

Ale co když má náš nepřítel pro jistotu hřebíky tři? Půjde to nějak narafičit i tentokrát? Nejspíš nás už nepřekvapí, že umíme zavěsit obraz tak, aby spadl, když upadne třeba ten rezavý hřebík uprostřed. To nám však nestačí, neboť naše nenávist vůči úhlavnímu nepříteli je obrovská a zlomyslní jsme až hanba. Nemohli bychom i se třemi hřebíky docílit toho, aby obraz spadl po odstranění libovolného z nich? Označme si je zleva po řadě A, B, C. Zkusme provázek omotat kolem hřebíků například podle schématu

$$+A - C + B + C - B - A + B - C - B + C.$$

Odstraníme-li pak libovolný hřebík, čímž zaniknou všechny členy, které se k němu vztahují, vyruší se postupně i všechny ostatní členy v tomto výrazu neboli obraz spadne. Jak takové zavěšení vypadá? (obr. 3)



Obrázek 3: Obraz visí, avšak po vyjmutí libovolného ze tří hřebíků spadne.

Pakliže by však náš úhlavní nepřítel měl o svůj milovaný obraz opravdu velkou starost a vyrukoval by na nás s celou svou zásobou n hřebíků, co bychom dělali potom? Inu, museli bychom si chvíli popřemýšlet. Poté (pokud bychom nenápadně nastavili provázek, aby byl dostatečně dlouhý) bychom zvládli pověsit obraz dokonce i na n hřebíků tak, aby spadl, když se libovolný jeden z nich uvolní.

Nejsme přece jen zlí až příliš? Mohli bychom se trochu umírnit a naraficit to třeba takto: Obraz pověsíme na n hřebíků, a dokud nevypadne ze zdi alespoň k z nich, bude viset. Jakmile však vyjmeme libovolných k hřebíků, zaručeně spadne. Ba dokonce ještě rafinovaněji: Pokud $A_1, A_2, \ldots, A_k$ jsou libovolné podmnožiny množiny hřebíků zatlučených do zdi, dá se na tyto hřebíky pověsit obraz tak, že bude viset, dokud ve zdi zůstane alespoň jeden hřebík z každé z těchto podmnožin, ale spadne, pokud alespoň jednu z těchto podmnožin hřebíků odstraníme celou.

Literatura

[1] DEMAINE, E. D., DEMAINEM, M. L., MINSKY Y. N., MITCHELL, J. S. B., RIVEST, R. L. a PĂTRAŞCU, M. Picture-Hanging Puzzles. *Lecture Notes in Computer Science*, svazek 7288, 2012, s. 81–93.

[2] MCINNES, *Leland Picture Hanging Problem*, 2003 (a přednáška Pepy Tkadlece ze soustředění MKS z roku 2010, která z tohoto článku vychází).

Jak lze bojovat s prekoncepcemi žáků o síle a pohybu?

Eva Hejnová
Katedra fyziky Přírodovědecké fakulty UJEP v Ústí nad Labem, eva.hejnova@ujep.cz

Úvod

Již v několika předchozích ročních letních škol jsem se ve svých příspěvcích zabývala známou skutečností, že žáci přicházejí do výuky fyziky (ale i jiných přírodních věd) s prekoncepcemi v různých oblastech (viz sborníky z letních škol, které se konaly v roce 2005 až 2008). Prekoncepce (též nazývané intuitivní představy, často také miskoncepce, mylné představy apod.) se vytvářejí od raného dětství na základě bezprostředního vnímání a pozorování okolního světa, na základě intuitivního zobecňování svých zkušeností a často bývají v rozporu s vědeckými poznatky [3]. Pro zjišťování těchto představ mohou učitelé dobře využít například pojmové mapy, písemná vyjádření žáků nebo diskuse se žáky [1]. Jednou z těchto metod, která poskytuje velký potenciál pro použití v běžné školní praxi jsou tzv. „concept cartoons“ (v českém překladu by bylo možné použít názvu konceptuální obrázky), o nichž bude v příspěvku dále pojednáno. Tento typ úloh není na našich školách zatím příliš rozšířen, ale jejich potenciál je velký, a to zejména s ohledem na možnost konkrétní aplikace tzv. konstruktivistického přístupu v běžné vyučovací hodině na základní, ale i střední škole.

Tyto úlohy totiž vyvolávají zcela přirozeně diskusi mezi žáky, během níž mají příležitost zapojit se do interaktivního rozhovoru ve skupině, mohou vyslovovat své myšlenky, klást si vzájemně otázky, generovat tvrzení, navrhovat vysvětlení a zdůvodňovat svoji argumentaci. Tento druh projevu je obhajován mnohými výzkumníky jako nejen lepší reprezentování povahy vědy, ale jako provokující kritičtější myšlení, jakož i rozvíjení konceptuálního myšlení.

V příspěvku bude nejprve krátce pojednáno o zjišťování prekoncepcí žáků pomocí testu zjišťující porozumění pojmu síla (test FCI). V další části příspěvku bude prezentováno několik příkladů úloh, které mohou být žákům zadány ve formě konceptuálních obrázků na téma pohyb a síla. Formulace a způsob zpracování úloh je zaměřeno pro žáky základních škol, ale lze je využít i na středních školách. Na závěr příspěvku stručně uvedu, jak lze s konceptuálními obrázky pracovat ve výuce.

Prekoncepce žáků a test FCI

Ke zjišťování porozumění základním pojmům, tj. toho jak studenti dané látce opravdu rozumějí, slouží tzv. konceptuální testy. Jejich výhodou je, že se dají snadno a rychle vyhodnotit (lze dobře využít i hlasovací metodu) a jsou velmi spolehlivé. Vhodné jsou však spíše pro studenty středních či vysokých škol, pro žáky na základních školách jsou zpravidla příliš obtížné, a to zejména co se týče nároků na jejich čtenářskou gramotnost. V České republice nejsou tyto testy bohužel příliš známé a využívané. V české verzi existuje pouze test Force Concept Inventory (dále jen FCI) – Porozumění pojmu síla, některé testy jsou k dispozici také ve slovenštině. Test FCI zkoumá porozumění základním pojmům newtonowské mechaniky. Obsahuje třicet kvalitativních úloh typu multiple-choice (u každé úlohy mohou žáci vybírat z pěti možností, přičemž nesprávné odpovědi, tzv. distraktory, představují nejčastější miskoncepce studentů), které zahrnují šest oblastí (kinematiku, 1., 2., 3. Newtonův zákon, princip superpozice a druhy sil).

Ukázka úlohy z testu FCI [2]: Chlapec vyhodí ocelovou kuličku kolmo vzhůru. Uvažujte pohyb kuličky těsně poté, co opustí ruku chlapce do doby, než dopadne na zem. Síly, kterými působí na kuličku vzduch, zanedbejte.
Jaké síly (síla) působí na kuličku za těchto podmínek?

(A) Gravitační síla působící směrem dolů a stále se zmenšující síla působící směrem nahoru.

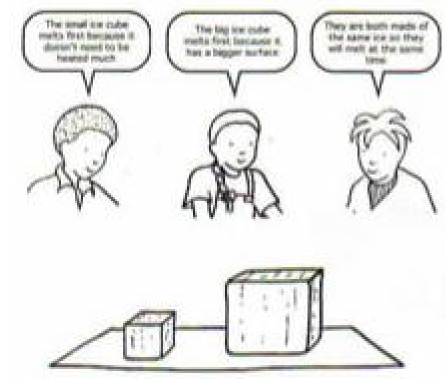
(B) Na kuličku působí od okamžiku, kdy opustila ruku chlapce, do doby než dosáhne nejvyššího bodu své dráhy stále se zmenšující síla směrem nahoru; na cestě dolů působí na kuličku stále rostoucí gravitační síla, protože se přibližuje k zemi.

(C) Na kuličku působí téměř konstantní gravitační síla směrem dolů a společně s ní působí síla směrem nahoru, která se stále zmenšuje, dokud kulička nedosáhne nejvyššího bodu. Na cestě dolů působí už pouze konstantní gravitační síla směrem dolů.

(D) Působí pouze téměř konstantní gravitační síla směrem dolů.

(E) Žádná z výše popsaných možností. Kulička padá zpátky k zemi díky přirozené tendenci ležet v klidu na zemi.

Co jsou to „concept cartoons“



Obrázek 1: ukázka je převzata z [4]

Jak již bylo uvedeno výše, úlohy z konceptuálních testů jsou pro běžného žáka ze základní školy náročné, neboť tyto úlohy bývají zpravidla poměrně textově rozsáhlé (viz ukázka úlohy z testu FCI). Jednou z cest, jak text v úlohách minimalizovat, je využití tzv. „concept cartoons“.
Jednoduše lze říci, že „concept cartoon“ má podobu kresby ve stylu komiksu (obr. 1), ve které se předkládá několik (zpravidla tři až čtyři) názorů na předložený problém. Často se přitom vychází z nějaké běžné každodenní situace [4]. V České republice není tento typ úloh zatím běžně ve výuce používán, a proto dosud neexistuje žádný ustálený český ekvivalent k anglickému názvu. Z tohoto důvodu budeme v dalším textu pro naše potřeby používat pro tento typ úloh označení konceptuální obrázky nebo konceptuální úlohy (jednoduše lze také říci, že jde o „úlohy s bublinou“).

Úlohy jsou konstruovány tak, aby provokovaly diskusi a přemýšlení o daném problému a stimulovaly vědecké myšlení. Z odpovědí jednotlivých mluvčí bývá zpravidla jedna správná. Situace se však vždy může „zkomplikovat“ úvahami typu „to závisí na“. I když se úlohy mohou zdát na první pohled jednoduché, vždy se nabízí několik komplikujících faktorů, zejména pokud chceme o daném problému uvažovat přesně [5]. Pokud učitel používá hlasovací zařízení, je možné hlasovat i o každé odpovědi zvlášť. Žáci pak vyslovují souhlas, či nesouhlas s postojem jednotlivých mluvčích na obrázku.
Konceptuální obrázky byly původně vytvořeny pro 9 až 13tileté žáky, ale v současné době jsou používány v zahraničí (zejména ve Velké Británii, kde byly poprvé

vytvořeny a ověřovány ve školní praxi) ve všech fázích primárního i sekundárního vzdělávání [6]. Úlohy představují též dobrý nástroj pro formativní hodnocení, protože dovolují učitelům nejenom získat zpětnou vazbu o uvažování žáků, ale také se prostřednictvím názorů jednotlivých mluvčích zaměřit na ty miskoncepce, které jejich žáci mohou mít.

Ukázky konceptuálních úloh a metodických poznámek k úlohám

V dalším textu uvedeme ukázky čtyř konceptuálních obrázků včetně metodických poznámek. Kompletní soubor úloh k tématu Síla a pohyb byl prezentován na letní škole v Hoštce a zájemcům je možné ho zaslat na požádání v elektronické podobě (kontakt: eva.hejnova@ujep.cz).

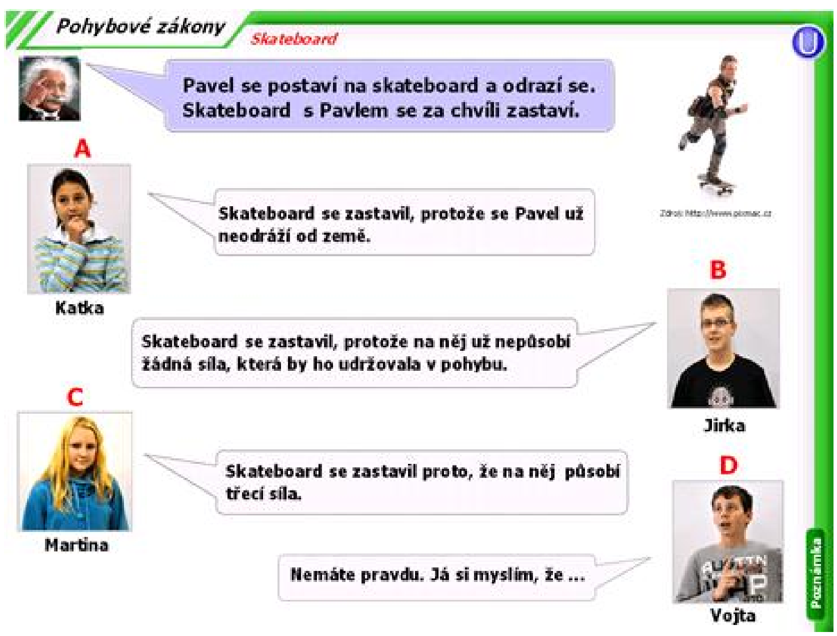
Úloha Sněžný skútr (obr. 2)

Obrázek 2

Metodická poznámka k úloze Sněžný skútr

První Newtonův zákon (nazývaný též zákon setrvačnosti) je v rozporu s běžnou zkušeností žáků, že pro každý pohyb je nutné působení síly a síla musí působit tak dlouho, dokud trvá pohyb. Tato představa je založena na skutečnosti, že ve světě kolem nás vždy existují síly odporující pohybu (třecí síla, odpor prostředí). Abychom tedy při seznamování žáků s prvním Newtonovým zákonem vycházeli z jejich zkušeností, musíme je nejprve seznámit s existencí sil odporujících pohybu, a také se skládáním sil, zvláště pak s rovnováhou sil. Pak můžeme hned od začátku použít formulaci zákona setrvačnosti zahrnující nejen prakticky nereálnou situaci, kdy na těleso „nepůsobí jiná tělesa silou", ale i situaci, kdy výsledná síla působící na těleso je nulová, neboli kdy síly jsou v rovnováze. Pro pochopení prvního Newtonova zákona je důležité se žáky rozebrat na konkrétních příkladech, že jak se těleso pohybuje nebo zda je v klidu závisí na výsledné síle působící na těleso. Žáci se často mylně domnívají, že pro každý pohyb (i rovnoměrný přímočarý) je nutná síla působící ve směru pohybu (tj. jestliže se realizuje pohyb, musí k němu být i síla, síla musí působit tak dlouho, jak dlouho pohyb trvá). Jedná se o typické aristotelovské představy.

Úloha Skateboard (obr. 3)



Obrázek 3

Metodická poznámka k úloze Skateboard

To, že se těleso zpomaluje a pak zastaví, je způsobeno třecí a odporovou silou, ne

tím, že se Pavel neodráží nebo, že tělesu jakási síla postupně „ubývá“, jak si žáci často myslí.
S žáky je možné provádět pokusy např. s kuličkou, která se pohybuje po různě drsných površích, nebo lze ukázat, jak klouže kostka ledu po hladkém povrchu nebo lze použít vznášedlo vyrobené z balónku připevněného k CD (postup výroby viz http://clanky.rvp.cz/clanek/o/g/9259/VZNASEDLO.html/).
Cílem je dovést žáky k představě, že pokud by na těleso žádné síly nepůsobily, pohybovalo by se rovnoměrným přímočarým pohybem (zákon setrvačnosti).

Úloha Vesmírná procházka (obr. 4)

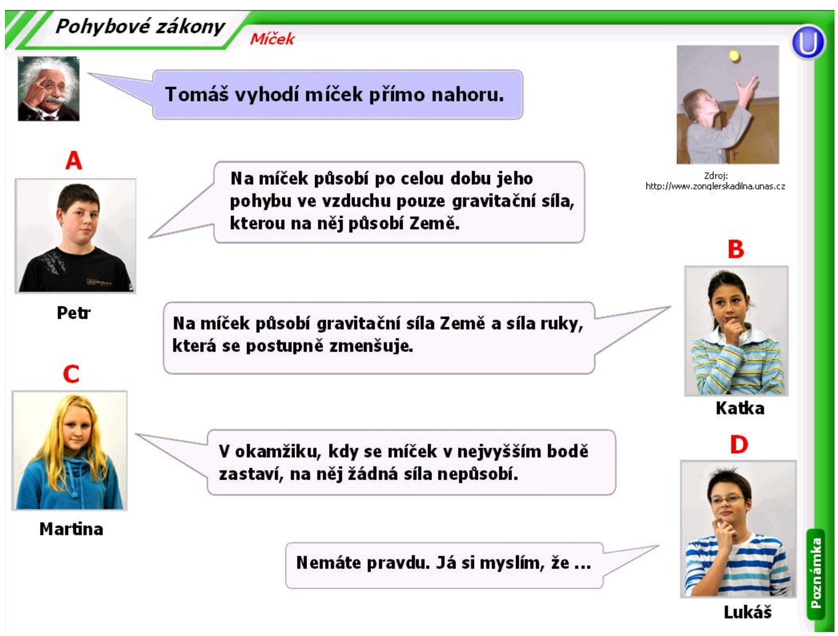
Obrázek 4: ukázka je převzata z [4]

Metodická poznámka k úloze Vesmírná procházka

Pokud by byla kosmická loď v klidu, bude se od ní kosmonaut pohybovat rovnoměrným přímočarým pohybem ve směru, ve kterém se odrazil.
Pokud se loď pohybovala nějakou rychlostí, bude mít kosmonaut jednak rychlost, kterou získal při odrazu a jednak rychlost, kterou se pohybovala loď. Obě rychlosti se budou skládat. Kosmonaut se pak bude pohybovat společně s kosmickou lodí (pokud se kosmická loď i nadále bude pohybovat stejnou rychlostí) a zároveň se od ní bude s konstantní rychlostí vzdalovat.

Žáci se často mylně domnívají, že se rychlost kosmonauta musí zmenšovat, protože ve vesmíru působí na kosmonauta třecí síla. Na druhou stranu si děti často myslí, že ve vesmíru žádné tření existovat nemůže a to ani mezi podrážkami bot kosmonauta a kosmickou lodí, takže se kosmonaut nemůže od lodi odrazit. Co se týče gravitační síly, kterou působí kosmická loď na kosmonauta, je tak malá, že by pohybu kosmonauta směrem od lodi nedokázala zabránit.
Se žáky lze také diskutovat o tom, jakým způsobem by se mohl kosmonaut dostat zpět k lodi (kosmonaut může např. odhodit část svého vybavení a to v opačném směru, než se odrazil. U starších žáků na střední škole můžeme využít i možnost, že by kosmonaut použil např. silnou svítilnu (i když se jedná spíše o teoretickou možnost, kdy lze využít hybnosti fotonů).
Velmi zajímavé jsou ukázky z „vesmírných procházek astronautů“, které lze najít na internetu (viz odkaz, který je uveden přímo u úlohy)..

Úloha Míček (obr. 5)



Obrázek 5

Metodická poznámka k úloze Míček

Žáci se často mylně domnívají, že na míček působí gravitační síla a „síla ruky“, která se postupně zmenšuje. Chybně si také myslí, že při pohybu míčku směrem vzhůru musí být „síla ruky“ větší než gravitační síla, jinak by se míček pohyboval dolů. Žáci si také myslí, že jestliže se těleso pohybuje, působí na ně síla ve směru pohybu a že jestliže se těleso nepohybuje, nepůsobí na ně žádná síla. Dále si myslí, že s „ubýváním“ pohybu „ubývá“ i síla.

Jak slouží konceptuální obrázky k odstraňování mylných představ a jak s nimi lze pracovat ve výuce

Konceptuální obrázky dobře motivují pro studium fyziky, ale obecně lze říci i přírodních věd, neboť dávají žákům možnost prezentovat, co si myslí. Žáci se nebojí chybovat, neboť to není „jejich chyba“, ale názor některého mluvčího.
Žáci se většinou nehádají, ale opravdu spolu diskutují. Velmi důležité je, že žák musí obhájit svoji myšlenku před těmi ostatními, a to je účinný mechanismus pro rozvoj hlubšího pochopení daného pojmu. Žáci zažívají pocit nejistoty, neboť neslyší od učitele jen to, co je správně.
Alternativní odpovědi vedou k rozvíjení kreativity, neboť v úlohách jsou často prezentovány myšlenky, se kterými se žáci předtím nesetkali. Věda je tak prezentována jako kreativní záležitost, kde je možné zkoumat mnoho věcí a zvažovat více faktorů (ne jako záležitost, kde existuje vždy jedna správná odpověď). Úlohy dávají možnost k rozvoji takových dovedností jako vyslovování hypotéz, předpovídání, užívání analogií, hodnocení důkazů, kladení otázek a obhajování stanoviska.
S úlohami lze pracovat ve všech částech hodiny, mohou sloužit k motivaci, výkladu i opakování. Způsob využití úloh závisí na učiteli i možnostech dané třídy. Osvědčený postup práce s úlohami je takový, že se žák nejprve individuálně seznámí s úlohou. Poté následuje diskuse ve skupině (osvědčily se menší skupiny po třech až čtyřech žácích), diskuse může být následně doplněna i jednoduchým pokusem, případně rozsáhlejším bádáním. Poté následuje celotřídní diskuse, ze které vyplyne, která alternativa z nabízených odpovědí je nejpřijatelnější a proč jsou jiné alternativy méně akceptovatelné.

Závěr

Jak bylo uvedeno výše, konceptuální obrázky mohou podporovat kladení otázek a přemýšlení studentů, stimulovat vyjadřování a argumentaci, která pomáhá žákům rozvíjet porozumění pojmům. Učitelům mohou tyto úlohy sloužit jako nástroj k diagnostikování miskoncepcí a k identifikaci mezer ve znalostech studentů, kterým se pak mohou ve výuce dále věnovat. Otázky kladené žáky poskytují

také hlubší vhled do toho, jak žáci o daném problému přemýšlejí. Jak se ukázalo v různých výzkumech [1], ze získaných materiálů (nahrávek a písemných záznamů rozhovorů žáků atd.) vyplynulo, že otázky kladené žáky byly jiné než ty, které jsou typické pro tradiční třídu. Děti se skutečně upřímně diví tomu, čemu nerozumějí a co se chtějí dozvědět. Důležitá je také skutečnost, že se ze strany žáků nejedná o jednoduché otázky na fakta, ale o uvažování o hypotézách, předpovídání a reflektivní myšlení, které často vyžaduje promyšlenou netriviální odpověď.
Učitelé, kteří úlohy tohoto typu používají (a potvrdilo se to i u našich učitelů, kteří pracovali s vytvořeným souborem úloh), většinou uvádějí, že žáci jsou motivováni k přemýšlení a diskutování a práce ve skupinách je baví. V zahraniční literatuře je často uváděna také zkušenost, že i neukáznění a ostýchaví žáci se rádi zapojují do diskusí i zkoumání, protože se necítí nijak ohroženi. Vzhledem k pozitivním přínosům tohoto typu úloh je vhodné seznamovat s nimi v co nejširší míře i naše učitele, např. prostřednictvím různých seminářů, literatury, v rámci pregraduální přípravy budoucích učitelů apod.. Úlohy by však měly být učitelům k dispozici i v knižní a elektronické podobě, podobně jako je tomu v zahraničí.

Literatura

[1] CHIN, CH. a TEOU LAY - YEN. Using CC in Formative Assessment: Scaffolding students´ argumentation. *Interantional Journal of Science Education*, 2009, 31(10), s. 1307–1332.

[2] HESTENES, D. a WELLS, M., SWACKHAMER, G. Force Concept Inventory. *The Physics Teacher*, 1992, 30.

[3] MANDÍKOVÁ, D. a TRNA, J. *Žákovské prekonecepce ve výuce fyziky*. Brno: Paido, 2011. ISBN 978-80-7315-226-0.

[4] NAYLOR, S. a KEOGH, B. *Concept Cartoons in Science Education*. Sandbach: Milgate House Publishers, 2010. ISBN 9780-955626081-1.

[5] NAYLOR, S. a KEOGH, B. Constructivism in Classroom: Theory into Practice. *Journal of Science Teacher Education*, 10(2), 93–106, 1999.

[6] STEPHENSON, P. a WARWICK, P. Using concept cartoons to support progression in students´understanding of light. *Physics Education*, 2002, 37(2), s. 135–141.

Dvě důležité strategie řešení problémů (cesta zpět a invariance)

Jan Kopka
Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí n.L., Jan.kopka@ujep.cz

Strategie Cesta zpět

Je to strategie poměrně často v matematice používaná (viz např. rozbor konstrukční úlohy v geometrii nebo rozbor při konstrukci důkazu věty, která má stavbu implikace). Nemusíme však pomocí ní nalézt celou cestu, jak daný problém vyřešit. Připomeňme, že při rozboru konstrukční úlohy obvykle začínáme větou: Předpokládáme, že úloha má řešení a že obrázek, který jsem si načrtl, představuje jedno z těchto řešení. Touto frází si právě připravujeme půdu pro použití této strategie.
Při strategii cesta zpět předpokládáme, že to, co máme dokázat, platí. Pak se snažíme z toho předpokladu odvodit něco, co už víme nebo co se dá lehko dokázat. Pokud dojdeme k tomu, co už známe nebo co je dáno, pak můžeme naše úvahy obrátit a tak se dostaneme k hledanému závěru. Ukažme tuto strategii na následujících problémech:

NIM hra

Úloha 1:

Na hromádce je 16 zápalek. Dva hráči střídavě odebírají jednu nebo dvě zápalky. Vyhrává ten, který odebere poslední jednu nebo poslední dvě zápalky.
Hráči si několikrát hru zahrají.

Úloha 1 (pokračování):

Pokuste se objevit vítěznou strategii některého z hráčů.

Poznámka. Vítězná strategie je taková strategie, že pokud ji hráč využívá, pak vyhraje bez ohledu na to, jak hraje jeho protihráč.

Řešení:
Použijeme strategii **Cesta zpět**. Pokud se některému z hráčů (říkejme mu A) podaří, aby byl na tahu jeho protihráč (říkejme mu B) ve chvíli, kdy jsou na hromádce 3 zápalky, pak A vyhraje. Hráč B může totiž odebrat jednu nebo dvě zápalky. Na hromádce zůstanou dvě zápalky nebo pouze jedna. Hráč A pak tyto dvě nebo jednu může odebrat a vyhraje. 3 zápalky na hromádce představují tedy bližší cíl. Pokračujme dál. Pokud se hráči A podaří, aby byl na tahu hráč B ve chvíli, kdy je na hromádce 6 zápalek, pak vyhraje. 6 zápalek po tahu hráče A je jeho ještě bližší cíl. A tak obdobně: ještě bližší cíle vítězné strategie jsou $9, 12, 15$. Pokud tedy bude první hráč hrát tak, aby po jeho tahu byly na hromádce následující počty zápalek

$$15, 12, 9, 6, 3.$$

Pak vyhraje.
Odpověď:
Pokud první hráč odebere nejprve 1 zápalku,a pak následně hraje tak, aby po jeho tahu zůstalo na hromádce postupně $(15), 12, 9, 6, 3$ zápalky, pak vyhraje. Toto je vítězná strategie pro prvního hráče.

Poznámka. Učitel může žákům pomoci objevit vítěznou strategii otázkou: V které chvíli již poznáte, který z vás vyhraje. Určitě je to při posledních třech zápalkách, později při posledních šesti zápalkách atd.

Abychom vítěznou strategii mohli později snadněji zobecnit, můžeme ji popsat takto: Vítěznou strategie prvního hráče tak představují po jeho tahu následující počty zápalek:

$$5 \cdot (2 + 1), 4 \cdot (2 + 1), 3 \cdot (2 + 1), 2 \cdot (2 + 1), 1 \cdot (2 + 1).$$

Začněme vytvářet hrozen problémů inspirovaný úvodní úlohou. Nejprve budeme měnit počet zápalek na hromádce.

Úloha 2:

Jak to vypadá s vítěznou strategií, pokud je na hromádce 17 zápalek.
Řešení:
Pokud první hráč odebere nejprve 2 zápalky a následně bude odebírat tak, aby po jeho tahu byly na hromádce následující počty zápalek: $(15), 12, 9, 6$ a 3, pak vyhraje. Existuje tedy opět vítězná strategie pro prvního hráče.

Úloha 3:

Jak to vypadá s vítěznou strategií, pokud je na hromádce 18 zápalek.
Řešení:
První hráč může odebrat jednu nebo dvě zápalky. Pak druhý hráč táhne tak, aby po jeho tahu bylo na hromádce 15 zápalek. Pokud bude následně odebírat tak, aby po jeho tahu byly na hromádce následující počty zápalek: $(15), 12, 9, 6, 3$, pak vyhraje. Existuje tedy vítězná strategie pro druhého hráče.

Úloha 4:

Zobecněte výsledky úloh 1, 2 a 3.
Odpověď:
Pokud počáteční počet zápalek není dělitelný číslem 3 (dává při dělení třemi zbytek 1 nebo 2), pak existuje vítězná strategie pro prvního hráče.
Pokud je počáteční počet zápalek dělitelný číslem 3, pak existuje vítězná strategie pro druhého hráče.
Nyní můžeme při rozšiřování hroznu měnit maximální počet odebíraných zápalek. Např.

Úloha 5:

Na hromádce je 19 zápalek. Dva hráči střídavě odebírají maximálně čtyři zápalky. Vyhrává ten, který odebere poslední zápalky(u). Pokuste se objevit vítěznou strategii některého z hráčů.
Odpověď:
V tomto případě existuje vítězná strategie pro prvního hráče. Nejprve odebere čtyři zápalky. Dále bude postupovat tak, aby po jeho tahu byly na hromádce následující počty zápalek $(15), 10$ a 5.
Postup uvedený v odpovědi k úloze 5 můžeme zapsat následovně:
První hráč bude odebírat zápalky tak, aby po jeho tahu byly počty zápalek na hromádce následující:

$$3 \cdot (4 + 1), 2 \cdot (4 + 1), 1 \cdot (4 + 1).$$

Získané výsledky nyní můžeme zobecnit.

Úloha 6:

Zobecněte výsledky předchozích úloh.
Odpověď:
Pokud je na hromádce n zápalek a počet odebíraných zápalek je maximálně k, kde $k < n$, pak vítězná strategie pro některého z hráčů je:

$$r \cdot (k+1), (r-1) \cdot (k+1), \ldots, 2 \cdot (k+1), 1 \cdot (k+1),$$

přičemž r je největší přirozené číslo pro které je $r \cdot (k+1) \leqslant n$.
Vítězná strategie pro prvního hráče nastává, pokud $r \cdot (k+1) < n$.
Vítězná strategie pro druhého hráče nastává, pokud $r \cdot (k+1) = n$.
Závěr odpovědi úlohy 6 můžeme formulovat ještě jinak:
Jestliže číslo $k+1$ nedělí číslo n, pak existuje vítězná strategie pro prvního hráče.
Jestliže číslo $k+1$ dělí číslo n, pak existuje vítězná strategie pro druhého hráče.

Pokud bychom chtěli zjistit zda žáci skutečně pochopili vítěznou strategii některého z hráčů, můžeme jim zadat analogickou úlohu k základní úloze. Při ní se však zápalky budou přidávat.

Úloha 7:

Hra: Hráči pokládají střídavě na hromádku jednu, dvě nebo tři zápalky. Vyhrává ten, který při svém tahu položí 23. zápalku. Objevte vítěznou strategii pro některého z hráčů.
Řešení:
Tentokrát jsou bližší cíle postupně odzadu: $19, 15, 11, 7, 3$. Vítězná strategie pro prvního hráče: Přikládá zápalky tak, aby po jeho tahu byl počet zápalek na hromádce následující:

$$3, 7, 11, 15, 19.$$

Počty zápalek lze tentokrát zapsat takto:

$$23-5\cdot(3+1),\ 23-4\cdot(3+1),\ 23-3\cdot(3+1),\ 23-2\cdot(3+1),\ 23-1\cdot(3+1).$$

Úloha 8:

Jak to vypadá s vítěznou strategií, pokud hra končí 22 zápalkami.
Hra: Hráči pokládají střídavě na hromádku jednu, dvě nebo tři zápalky. Vyhrává ten, který při svém tahu položí 23. zápalku. Objevte vítěznou strategii pro některého

z hráčů Odpověď: Pokud hra končí 22 zápalkami, existuje vítězná strategie opět pro prvního hráče. Postupuje tak, aby po jeho tahu bylo na hromádce postupně $2, 6, 10, 14, 18$ zápalek.

Úloha 9:

Jak to vypadá s vítěznou strategií, pokud hra končí 24 zápalkami. Odpověď: Pokud hra končí 24 zápalkami, existuje vítězná strategie pro druhého hráče. Postupuje tak, aby po jeho tahu bylo na hromádce postupně $4, 8, 12, 16, 20$ zápalek. Nyní můžeme při tvorbě dalších úloh měnit i maximální počet přidávaných zápalek. To však již přenecháme čtenáři. My zde provedeme zobecnění. hromádce postupně $2, 6, 10, 14, 18$ zápalek.

Úloha 10:

Pokud hra končí, je-li na hromádce n zápalek a hráči střídavě přikládají maximálně k zápalek, kde $k < n$, pak vítězná strategie pro některého z hráčů představuje následující počty zápalek:

$$n - r \cdot (k+1), n - (r-1) \cdot (k+1), \ldots, n - 2 \cdot (k+1), n - 1 \cdot (k+1),$$

kde r je největší přirozené číslo, pro které platí $r \cdot (k+1) \leqslant n$.
Pokud $r \cdot (k+1) < n$, pak existuje vítězná strategie pro prvního hráče.
Pokud $r \cdot (k+1) = n$, pak existuje vítězná strategie pro druhého hráče.
Závěr odpovědi k úloze 10 můžeme formulovat ještě jinak:
Jestliže číslo $k+1$ nedělí číslo n, pak existuje vítězná strategie pro prvního hráče.
Jestliže číslo $k+1$ dělí číslo n, pak existuje vítězná strategie pro druhého hráče.

Na závěr můžeme žákům zadat numericky náročnější úlohy, např.

Úloha 11:

Na hromádce je 839 zápalek. Dva hráči střídavě odebírají maximálně 8 zápalek. Vyhrává ten, který odebere poslední zápalky nebo poslední zápalku. Zjistěte, pro kterého z nich existuje vítězná strategie a jak vypadá.
Řešení: Nejprve zjistíme, zda je číslo 839 dělitelné číslem 9. Ciferný součet čísla 839 je $8 + 3 + 9 = 20$. Číslo 20 není dělitelné číslem 9. Při dělení devíti dává toto číslo zbytek 2. Proto existuje vítězná strategie pro prvního hráče. V prvním tahu tento hráč odebere 2 zápalky. Na hromádce zbude 837 zápalek. Pak bude odebírat

tak, aby se po jeho tahu vždy počet zápalek oproti jeho předchozímu tahu zmenšil o 9. Tzn. počty zápalek po odebírání prvního hráče budou postupně:

$$837, 828, 819, 810, \ldots, 27, 18, 9.$$

Po posledním odebrání prvního hráče již nezbude žádná zápalka a tak tento hráč vyhrál.

Strategie invariantu

Invariant je takový aspekt problému, který se nemění. V nejširším smyslu pod invariantem rozumíme jakoukoliv vlastnost matematického objektu nebo matematických objektů, která je společná všem objektům určité množiny a která se nemění při přechodu od jednoho objektu k jinému objektu dané množiny. Přechod je obvykle zadán určitým zobrazením.
Nejprve zadáme část problému:

Úloha 1:

Na tabuli jsou napsaná tři přirozená čísla. Libovolné z nich smažeme a místo něho napíšeme součet zbylých zmenšený o 1.
Úkol:
Zvolte si tři čísla a několikrát proveďte výše popsanou úpravu, abyste se s ní dobře seznámili.

Úloha 1 (pokračování):

Úpravu opakujeme několikrát až nakonec dostaneme čísla $29, 30, 31$. Zjistěte, zda mohla být na začátku na tabuli napsaná čísla $2, 2, 2$.
Řešení:
Začněme trojicí čísel $2, 2, 2$. Pokud byla na začátku tato čísla, pak po první úpravě dostaneme:

$$2, 2, 2 \longrightarrow 2, 2, 3.$$

Smazali jsme jednu dvojku a místo ní jsme napsali $3 = (2+2) - 1$. Po další úpravě dostaneme :

$$2, 2, 3 \longrightarrow \begin{cases} 2, 2, 3 & \text{Pokud smažeme } 3. \\ 2, 3, 4 & \text{Pokud smažeme } 2. \end{cases}$$

Ve trojici $2, 2, 3$ jsou dvě čísla sudá a jedno číslo liché. Po obou možných úpravách vzniknou trojice, kde jsou opět dvě čísla sudá a jedno je liché. Musí to tak být vždy?
Můžeme dál **experimentovat** a nakonec vyslovit hypotézu:
Hypotéza:
Provedeme-li uvedenou úpravu na trojici čísel sudé, sudé, liché (na pořadí nezáleží), pak vznikne opět trojice čísel sudé, sudé, liché.
Zdůvodnění:
Označíme-li sudé číslo $2k$ a liché číslo $2k + 1$ (kde k je přirozené číslo), pak platí:
Smažeme-li liché číslo, pak dopsané číslo je

$$2k_1 + 2k_2 - 1 = 2(k_1 + k_2) - 1,$$

což je číslo liché.
Smažeme-li sudé číslo, pak dopsané číslo je

$$2k_1 + (2k_2 + 1) - 1 = 2(k_1 + k_2),$$

což je číslo sudé.
Hypotéza tedy platí.
Závěr:
Počet sudých (i lichých) čísel se při úpravách nemění. Tento počet je proto vzhledem k prováděným úpravám invariantem.
Odpověď:
Úpravami trojice čísel $2, 2, 2$ budeme dostávat trojice čísel, kde dvě budou sudá a jedno liché. Protože v trojici čísel $29, 30, 31$ jsou dvě čísla lichá a jedno sudé, nemohla být při úpravách výchozí trojice $2, 2, 2$.

Poznámka. Při řešení jsme viditelně využili strategii invariantu. Invariant jsme objevili pomocí experimentování. Protože jsme při řešení vyšli z trojice $2, 2, 2$ (koncová situace), použili jsme také strategii cesta zpět. Dále jsme podstatnou měrou využili strategii parity a také nástroj zvaný vhodná symbolika.

Didaktická poznámka:
O invariantu není potřeba hovořit. Stačí, když se učitel zeptá, jak je to po úpravě s počtem sudých a lichých čísel. Procvičujeme sčítání a odčítání čísel a také pojmy sudé a liché číslo.

Úloha 2:

Na zázračném stromě sadař vypěstoval 15 banánů a 16 pomerančů. Každý den utrhl dva plody a na stromě v tu chvíli vyrostl jeden nový plod. Přičemž, pokud

utrhl dva stejné plody vyrostl pomeranč, pokud však utrhl různé plody vyrostl banán. Jaký plod bude na stromě poslední?
Řešení: Abychom získali vhled do problematiky můžeme experimentovat. Začneme samozřejmě s malými čísly. Protože sudost a lichost počtu jednotlivých druhů ovoce může hrát roli, zvolíme pro počet banánů liché číslo, např. 5 a pro počet pomerančů sudé číslo, např. 4. Nyní si zahrajeme na sadaře a svoje sklízení **budeme zapisovat do tabulky 1**.

banány	pomeranče	co jsme utrhli
5	4	
3	5	2 banány
3	4	1 banán a 1 pomeranč
3	3	1 banán a 1 pomeranč
3	2	2 pomeranče
1	3	2 banány
1	2	1 banán a 1 pomeranč
1	1	2 pomeranče
1	0	1 banán a 1 pomeranč

Tabulka 1

Při našem experimentu zůstal na stromě nakonec banán. Musí to tak být vždy?
Podívejme se jaká čísla dostáváme pro počty banánů. Všechna čísla jsou lichá. Lichost počtu banánů je tak zřejmě invariantem vzhledem k prováděnému česání. Můžeme tedy vyslovit:
Hypotéza:
Pokud na stromě vyroste lichý počet banánů, pak poslední plod, který na stromě zůstane je banán.
Ještě než hypotézu zdůvodníme, můžeme říci, že každý den se zmenší počet ovoce na stromě o 1. Sadař tak může česat $b+c-1$ dní, kde b a c je po řadě počet banánů a pomerančů na začátku.
Zdůvodnění:
Každý den se počet plodů zmenší o 1. Počet banánů je každý den liché číslo. Buď zůstává stejný nebo se zmenší o 2.
Na počátku byl počet banánů vyjádřen lichým číslem. Utrhneme-li dva banány, zmenší se jejich počet o 2, což je opět liché číslo. Utrhneme-li banán a pomeranč, zůstane počet banánů stejný.
Lichost počtu banánů je tak **invariantem** vzhledem k česání plodů. Na stromě

proto nemohou zůstat 2 banány ani 2 pomeranče. Musí tam tedy zůstat 1 banán a 1 pomeranč. Po jejich utržení na stromě vyroste banán a to je poslední plod.
My jsme problém řešili obecněji a tak se teď vrátíme k zadání:
Odpověď:
Po 30 dnech česání zůstane na zázračném stromě banán.
Vyslovme **analogickou** úlohu. Počet banánů bude vyjádřený lichým sudým číslem.

Úloha 3:

Na zázračném stromě sadař vypěstoval 12 banánů a 11 pomerančů. Každý den utrhl dva plody a na stromě v tu chvíli vyrostl jeden nový plod. Přičemž, pokud utrhl dva stejné plody vyrostl pomeranč, pokud však utrhl různé plody vyrostl banán. Jaký plod bude na stromě poslední?
Řešení:
Experimentováním zřejmě dojdeme k závěru, že tentokrát bude na stromě posledním plodem pomeranč. Zdůvodnění vyslovené hypotézy nyní spočívá v tom, že počty banánů budou stéle pouze sudá čísla. Invariantem tentokrát bude sudost počtu banánů.
Poznámka:
Při řešení problému 2 i 3 jsme použili strategie zjednodušení a experimentování, strategii invariantu, strategii parity, ale také strategii zobecnění a konkretizace. Na základě experimentování jsme vždy vyslovili hypotézu, která obsahovala náš problém jako speciální případ. Toto zobecnění jsme také dokázali. Při řešení problému Lze navíc využít strategii analogie.
Didaktická poznámka:
Při zjednodušení před začátkem experimentování u problému 2 žákům poradíme, aby za počet banánů volili malé liché číslo a pro počet pomerančů jakékoliv malé číslo. O invariantu není potřeba hovořit. Stačí, když se učitel zeptá jak je to po utržení plodů vypadá s počtem banánů. Při řešení procvičujeme sčítání a odčítání čísel a také pojmy sudé a liché číslo.

Literatura

[1] KOPKA, J. *Výzkumný přístup při výuce matematiky*, 1. vyd. Ústí n. L.: UJEP, 2000.

[2] KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice*, 1. vyd. Ružomberok: Katolická Univerzita, 2005.

Ukázky zkoumání ve školské matematice

Jan Kopka

Katedra matematiky, Přírodovědecká fakulta UJEP v Ústí n.L., Jan.kopka@ujep.cz

V článku předložíme dvě ukázky řešení problému pomocí zkoumání. První bude z oblasti dělitelnosti, druhá bude souviset s Fibonacciho posloupností.

Největší společný dělitel

V následujícím problému půjde o to určit největšího společného dělitele pro nekonečně mnoho přirozených čísel.

Problém 1:

Určete v množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel největšího společného dělitele všech čísel $n^3 + 17n$, kde n je nenulové přirozené číslo.

Řešení:

Protože požadované číslo musíme nejprve objevit, začneme experimentováním. Pro $n = 1, 2, 3, 4, 5$ dostaneme (viz tab. 1): Zkoumáním tabulky zjistíme, že

n	1	2	3	4	5
$n^3 + 17n$	18	42	132	132	210

Tabulka 1

$D(18, 42) = 6 \cdot D(3, 7) = 6 \cdot 1 = 6$. Číslo 6 je dělitelem i ostatních čísel uvedených v tabulce 1 (jsou sudá a jejich ciferný součet je dělitelný třemi). Největším společným dělitelem všech uvažovaných čísel proto mohou být pouze čísla $1, 2, 3, 6$. Dokážeme-li, že 6 dělí všechna tato čísla, bude 6 jejich největším společným dělitelem. Hypotéza: $(\forall n \in \mathbb{N})\ \ 6|(n^3 + 17n)$

Nyní ukážeme tři různé důkazy právě vyslovené hypotézy.

a) Důkaz matematickou indukcí:

1) Dokážeme, že hypotéza platí pro $n = 1$. To však platí – viz předchozí zkoumání.

2) Dokážeme $(\forall n \in \mathbb{N})\ \left[6|(n^3 + 17n) \implies 6|((n+1)^3 + 17(n+1))\right]$
   Nechť n je libovolné přirozené číslo pro které platí, že $6|(n^3 + 17n)$. Pak

$$(n+1)^3+17(n+1) = n^3+3n^2+3n+1+17n+17 = (n^3+17n)+3n(n+1)+18$$

Výraz v první závorce je dělitelný šesti podle indukčního předpokladu. Druhý sčítanec je také dělitelný šesti, protože je součinem čísla 3 a výrazu $n(n+1)$, což je součin dvou za sebou jdoucích přirozených čísel, a to znamená, že jedno z nich je dělitelné dvěma. Poslední sčítanec je také dělitelný šesti. Proto i součet těchto tří sčítanců je dělitelný šesti. $\square$

a) Důkaz pomocí úpravy výrazu na „faktoriálové součiny“.
Využijeme skutečnost, že součin tří za sebou jdoucích přirozených čísel je dělitelný dvěma (minimálně jedno z čísel je sudé) a současně třemi (ze tří za sebou jdoucích přirozených čísel je jedno násobkem tří). Tento součin je proto dělitelný číslem $3 \cdot 2 = 6$.
Výraz $n^3 + 17n$ můžeme upravit takto:

$$\begin{aligned} n^3 + 17n &= (n^3 - n) + 18n = n(n^2 - 1) + 18n = n(n-1)(n+1) + 18n \\ &= (n-1)n(n+1) + 18n \end{aligned}$$

První sčítanec je dělitelný šesti (zdůvodnění viz výše) a druhý také. Proto i součet těchto dvou čísel je dělitelný šesti. To platí pro libovolné přirozené číslo n.

a) Důkaz pomocí využití zápisu přirozených čísel n ve tvaru $6k + z$, kde $z = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Budeme-li přirozené číslo n dělit číslem 6, dostaneme některý ze zbytků $0, 1, 2, 3, 4, 5$. Libovolné přirozené číslo n se tak dá zapsat ve tvaru $6k + z$, kde k je neúplný podíl a z je zbytek. Libovolné přirozené číslo n proto můžeme zapsat v jednom z následujících tvarů:

$$6k, 6k+1, 6k+2, 6k+3, 6k+4, 6k+5 \tag{1}$$

Pokud výrazy (1) dosadíme do výrazu $n^3 + 17n$, dostaneme:

$$\begin{array}{ll} n = 6k & (6k)^3 + 17 \cdot 6k = 6(36k^3 + 17k) = 6 \cdot A \\ n = 6k+1 & (6k+1)^3 + 17 \cdot 6(k+1) = 216k^3 + 108k^2 + 120k + 18 = 6 \cdot B \\ n = 6k+2 & (6k+2)^3 + 17 \cdot 6(k+2) = 216k^3 + 216k^2 + 174k + 42 = 6 \cdot C \\ n = 6k+3 & (6k+3)^3 + 17 \cdot 6(k+3) = 216k^3 + 324k^2 + 264k + 78 = 6 \cdot D \\ n = 6k+4 & (6k+4)^3 + 17 \cdot 6(k+4) = 216k^3 + 432k^2 + 390k + 132 = 6 \cdot E \\ n = 6k+5 & (6k+5)^3 + 17 \cdot 6(k+5) = 216k^3 + 540k^2 + 552k + 210 = 6 \cdot F \end{array}$$

Zjistili jsme, že číslo 6 je dělitelem výrazu $n^3 + 17n$ pro libovolná $n \in N$, a proto je i největším společným dělitelem uvažovaných čísel.

Fibonacciho posloupnost

Obrázek 1

Motivace: Fibonacci (viz obr. 1) byl jedním z největších matematiků středověku. Byl např. velkým propagátorem desítkové poziční soustavy, která vznikla v Indii a kterou do Evropy přinesli Arabové. Narodil se okolo roku 1175 ve městě Pizza se známou šikmou věží. Jeho vlastní jméno bylo Leonardo Pisánský. Protože však on sám si říkal Fibonacci, což znamená syn Bonacciho, je dnes znám spíše pod tímto jménem. Zůstalo po něm celkem 5 matematických prací, z čehož čtyři byly knihy. V jedné z nich vyslovil takovýto problém:

Vypustíme do přírody párek malých zajíců. Zajícům trvá měsíc, než dospějí, a pak vždy každý další měsíc mají párek zajíčků. Kolik párů zajíčků bude v přírodě za rok?

Pokud si situaci v několika prvních měsících graficky znázorníme, dostaneme strom na obrázku 2 (křížek představuje párek zajíců).

Získaná posloupnost dostala od francouzského matematika Lucase v devatenáctém století název Fibonacciho. Tato posloupnost má mnoho zajímavých vlastností, a proto se pokusíme některé z nich objevit.

Další členy posloupnosti

Prvních deset členů **Fibonacciho posloupnosti** je

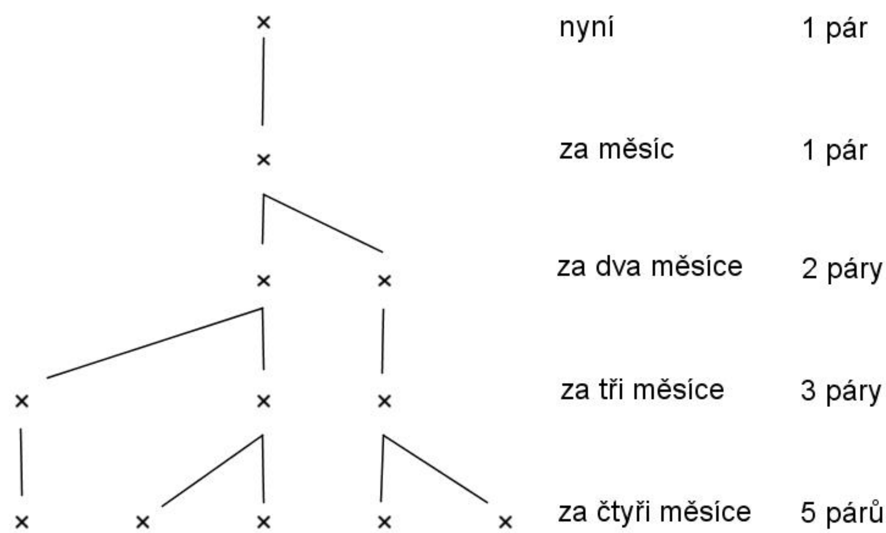
$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.$$

Napište dalších pět členů této posloupnosti.

$$(89, 144, 233, 377, 610)$$

Abychom se mohli o **Fibonacciho číslech**, tj. členech této posloupnosti, lépe vyjadřovat, budeme používat k jejich označení písmeno F s indexem udávajícím pořadí tohoto čísla, tzn.

$$F_1 = 1,\ F_2 = 1,\ F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13 \text{ atd.}$$



Obrázek 2

Vytváření posloupnosti

Pokuste se napsat formuli, pomocí níž vytváříme další členy posloupnosti.
$F_1 = F_2 = 1$ a každý další člen vytvoříme vždy sečtením dvou členů předchozích, tzn.

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1}, \quad \text{kde } n \geqslant 3. \tag{2}$$

Pravidlu (2) se říká Fibonacciho pravidlo. Nyní již můžeme odpovědět na otázku ve Fibonacciho problému, kolik párů zajíců bude v přírodě za rok. Bude to $F_1 3$, což je 233.

Zajímavé problémy (související s Fibonacciho posloupností)

Problém 1: Zdolávání schodů

Používám schody raději než výtah. Když pospíchám, beru schody po dvou. Jindy došlápnu na každý schod. Jestliže používám oba dva druhy pohybů – krok (K) na následující schod a skok (S), což je vynechání jednoho schodu, kolika různými způsoby mohu zdolat n schodů? Např. pro 4 schody dostaneme tyto možnosti:

1. $KKKK$
2. KKS
3. KSK
4. SKK
5. SS

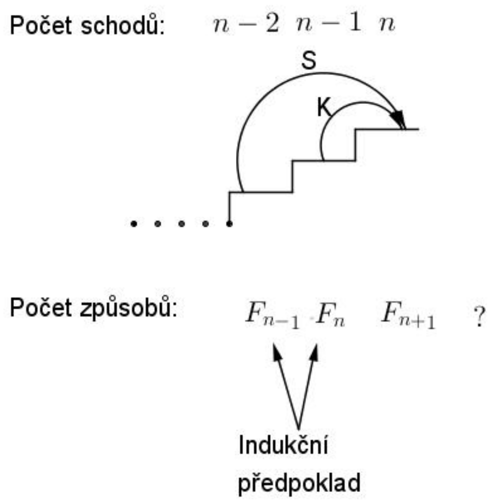
Máme tedy 5 různých způsobů, jak překonat 4 schody.
Řešení:
Experimentování:

1 schod	K	1 způsob	$F_2 = F_1 = 1$
2 schody	KK, S	2 způsoby	$F_3 = 2$
3 schody	KKK, KS, SK	3 způsoby	$F_4 = 3$
4 schody	viz výše	5 způsobů	$F_5 = 5$
5 schodů	...	8 způsobů	$F_6 = 8$

Hypotéza:
Existuje $F_{(n+1)}$ způsobů, jak překonat n schodů.
Důkaz matematickou indukcí (jedná se o zobecněnou matematickou indukci):

1. Pro $n = 1$ hypotéza platí – viz experimentování.
2. Předpokládejme, že na schod $n - 2$ se dostaneme F_{n-1} způsoby a na schod $n - 1$ se dostaneme F_n způsoby. Ukažme, že na schod n se dostaneme F_{n+1} způsoby viz obr. 3. Na schod n se dostaneme, buď skokem ze schodu $n - 2$, nebo krokem ze schodu $n - 1$. Podle indukčního předpokladu to ale znamená, že na schod $n - 2$ se dostanu F_{n-1} způsoby a na schod $n - 1$ se dostanu F_n způsoby, což znamená, že na schod n se dostaneme $F_{n-1} + F_n$ způsoby, což je F_{n+1} způsoby. $\square$

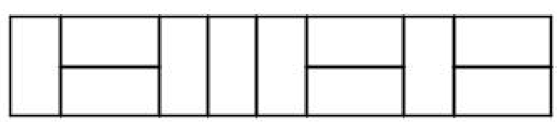
Odpověď je proto obsažena ve výše vyslovené hypotéze.



Obrázek 3

Problém 2: Stavba zídky

Stavíme zídku výšky 2 a máme k dispozici cihly mající jeden rozměr 1 a druhý rozměr 2. Kousek zídky mající délku 11 je ukázán na obr. 4. Kolika způsoby můžete postavit zídku mající délku n?



Obrázek 4

Řešení:
Označme si cihlu na stojato S a 2 cihly nad sebou na ležato L.
Experimentování:

Délka 1	S	1 způsob	$F_2 = 1$
Délka 2	SS, L	2 způsoby	$F_3 = 2$
Délka 3	SSS, SL, LS	3 způsoby	$F_4 = 3$
Délka 4	$SSSS, SSL, LSS, LL$	5 způsobů	$F_5 = 5$
Délka 5	$\dots$	8 způsobů	$F_6 = 8$

Hypotéza:
Zídku délky n lze postavit F_{n+1} způsoby.
Důkaz matematickou indukcí vytvoříme analogicky jako důkaz u předchozího problému a přenecháme ho proto čtenáři. Poznamenejme pouze, že zídka bude končit buď jednou cihlou nastojato, nebo dvěma cihlami nad sebou naležato.
Po provedení důkazu můžete říci, že hypotéza představuje správnou **odpověď**.

Problém 3: Cesta vytvořená bez tyčinek délky 1

Máme tyčinky délek $2, 3, 4, 5$, atd. Chybí nám tedy tyčinky délky 1. Kolika způsoby můžete vytvořit pomocí těchto tyčinek přímou cestu délky n, kde n je přirozené číslo > 1?
Náznak řešení:
Tyčinky budeme označovat obdobně jako v předchozím problému.

cesta délky 2	2	1 způsob	$F_1 = 1$
cesta délky 3	3	1 způsob	$F_2 = 1$
cesta délky 4	4, 2+2	2 způsoby	$F_3 = 2$
cesta délky 5	5, 3+2, 2+3	3 způsobů	$F_4 = 3$
cesta délky 6	6, 4+2, 2+4, 3+3, 2+2+2	5 způsobů	$F_5 = 5$

Hypotéza:
Cestu délky n můžeme vytvořit z tyčinek délky $2, 3, 4, \dots$
(není zde tyčinka délky 1) celkem F_{n-1} způsoby.

Poznámka. Z našeho zápisu při experimentování je dobře vidět, že problém 3 by mohl znít: Kolika způsoby můžeme zapsat přirozené číslo $n > 1$ jako součet čísel $2, 3, 4$, atd. (přitom např. zápisy $2 + 3$ a $3 + 2$ jsou různé).

Literatura

[1] KOPKA, J. *Výzkumný přístup při výuce matematiky.* 1. vyd. Ústí n. L.: UJEP, 2000.

[2] KOPKA, J. *Zkoumání ve školské matematice.* 1. vyd. Ružomberok: Katolická Univerzita, 2005.

Demonstrační experimenty s kapalným dusíkem

Jiří Králík
katedra fyziky PřF UJEP, Ústí nad Labem, jkralik@physics.ujep.cz

1 Několik zajímavostí na úvod[1]

- Dusík byl jako samostatná látka objeven ve druhé polovině 18. století.
- Tuto látku pojmenoval Antoine Lavoisier „azote“ – dusivý plyn (člověk se při dýchání tohoto plynu dusí, protože potřebuje kyslík, ne dusík :-)).
- Je bez barvy, chuti a zápachu. Není toxický a v plynném skupenství za normálních teplot a koncentrací ani jinak nebezpečný.
- Plynný dusík se obvykle vyskytuje v molekulách N_2 (pevná trojná vazba).
- Dusík tvoří 78 % objemu vzduchu v atmosféře.
- Využívá se v amoniaku a kyselině dusičné jako hnojivo, rovněž se používá jako inertní atmosféra např. při výrobě integrovaných obvodů, výrobě nerezové oceli nebo při plnění obalů výrobků, aby nedošlo ke zmačkání a zvlhčení (např. brambůrky). Dříve se užíval k výrobě střelného prachu.
- Dusík začíná vřít (či kapalnět) při 77,35 K ($= -195,80$ °C), taje (či tuhne) při 63,14 K ($= -210,01$ °C).

[1] Základní zdroj inspirace k těmto pokusům jsem získal při návštěvě technického muzea v Mnichově (viz http://www.deutsches-museum.de/). Některé doplňující informace pak z wikistránky `http://cs.wikipedia.org/wiki/Dus\%C3\%ADk` a z pěkného článku o kapalném dusíku od docenta Miloše Rottera `http://kdf.mff.cuni.cz/veletrh/sbornik/rozsirene/Rotter/Rotter.html`. Dále mi byly inspirací některé experimenty umístěné na YouTube (zejména viz `http://www.youtube.com/playlist?list=PL2519752840E19531\&feature=plcp`). Věře Tomešové a Nicol Bendlové děkuji za účinnou pomoc a mnohé zlepšovací návrhy při samotném experimentování. Pokud v tomto textu najdete nějakou chybku či vás napadne i něco jiného, jak ho lze vylepšit, dejte mi prosím vědět na můj mail. Tento soubor budu postupně doplňovat a vystavím ho na `http://physics.ujep.cz/~jkralik/downloads.htm`.

- Výroba kapalného dusíku je velmi levná – méně než 10 Kč/l (oproti např. kapalnému héliu, jehož výrobní cena je řádově 100 Kč/l), nicméně prodejní cena se pohybuje mezi 40 a 50 Kč/l.
- Hustota kapalného dusíku je zhruba 800 kg/m^3, tj. je nižší než hustota vody.
- Viskozita kapalného dusíku je zhruba 6 krát menší než viskozita vody.
- Z jednoho litru kapalného dusíku vznikne za atmosférického tlaku asi 680 litrů plynného dusíku (o pokojové teplotě).
- Kapalný dusík se používá například na vypalování bradavic nebo na uchovávání tkání.
- Kapalný dusík lze ve větším množství pro školu získat např. od firem `http://www.linde-gas.cz/` či `www.lineq.cz`. Za poměrně nízký poplatek (zhruba 50 Kč/den) si lze půjčit i Dewarovu nádobu. V menších množstvích lze kapalný dusík získat např. na kožním nebo někde, kde se zabývají plemenářstvím.

2 Změna vlastností materiálů, fázové přechody[2]

2.1 Var způsobený ledem

Pomůcky: Vodní led (tající).
Provedení: Vhoďte kus ledu do nádoby s dusíkem a sledujte překotný var dusíku kolem ledu.
Vysvětlení: Dusík má v nádobě teplotu těsně pod bodem varu, tj. zhruba -196 °C, led v blízkosti bodu tání je pro kapalný dusík velmi horký a způsobí, že dusík v okolí ledu dosáhne varu a začne překotně vřít.
Dodatek: Je vhodné před vhozením kusu ledu do dusíku dojít se studenty k předpovědi, jak se bude chovat velmi horká voda, když do ní ponoříme žhavé železo.

2.2 Zmrazování potravin

Pomůcky: Kladivo (dřevěné), pevná podložka, potravina s vyšším obsahem vody (např. citrusové ovoce, jablko, rajské jablko, jahody, banán), vejce, karafiát.

[2]U všech dále uvedených pokusů se samozřejmě předpokládá nejen přítomnost samotného kapalného dusíku, ale i vhodných nádob na jeho uchovávání v menších množstvích (osvědčily se polystyrénové). Rovněž používání ochranných pomůcek nemusí být na závadu. :-)

Provedení: Umístěte na cca 1 minutu jahodu do nádoby s kapalným dusíkem (vejce je nutné nechat min pětkrát déle (předem rotací ukázat, že je neuvařené), po vyjmutí z nádoby budou křehké – lze rozbít kladivem. Namočte do nádoby krátce karafiát – po vyjmutí stačí květ zmáčknout a rozpadne se na malé kousky.

Vysvětlení: Led je křehký a protože v namáhaných potravinách i karafiátu je mnoho vody, jsou křehké i ony. Vajíčko není denaturované, i když tak vypadá – necháte-li ho delší dobu v teplé místnosti, opět úplně roztaje.

Dodatek: Jahoda je vhodná proto, že je malá a nenasaje (= nespotřebuje) tolik dusíku a rychle se ochladí. Navíc, protože v sobě neobsahuje tak velké procento vody, takže příliš nepraská. Když totiž mražená potravina obsahuje příliš velké procento vody (např. hroznové víno), ráda praská ještě před vynořením z dusíku. Je to v důsledku anomálie vody, která má nejvyšší hustotu při zhruba 4 °C a tedy při chladnutí její objem (při dané hmotnosti) roste.

2.3 Zmrazování ruky

Pomůcky: Živá ruka, teploměr pro měření velmi nízkých teplot (není nutný).

Provedení: Namočte do nádoby s kapalným dusíkem ruku a po několika málo sekundách ji vyjměte.

Vysvětlení: Jak to, že neztuhne jako předměty v předešlé demonstraci? Důvody, proč se ruce nic nestane jsou v zásadě tři: 1) Pokud ruku nenecháte v dusíku dlouho, nenastane termodynamická rovnováha. 2) Živá ruka je udržována na vyšší teplotě vůči okolí krevním oběhem, proto pod určitou úroveň chladne nesnadno. 3) Onu chvilku, po kterou je ruka ponořena, ji od přímého styku s kapalným dusíkem chrání vrstva par, které vznikají díky prudce se vypařujícímu dusíku. Přitom dusíkové páry jsou o něco teplejší než samotný kapalný dusík (viz Leidenfrostův jev).

Dodatek: Před ponořením ruky je vhodné na nízkoteplotním teploměru ukázat, jak velmi chladný kapalný dusík je. Místo teploměru lze jako ukázku „chladnosti“ kapalného dusíku ochladit například kovovou lžíci, která se po umístění zpět do pokojové teploty postupně ojíní (a k ní přiložený vlhký hadřík přimrzne).

2.4 Hopsakoule a matlakoule

Pomůcky: Hopsakoule (hopík), matlakoule.

Provedení: Ukažte diametrálně rozdílné chování hopsakoule a matlakoule při pokojových teplotách. Poté obě namočte do tekutého dusíku (asi 1,5 min). Obě koule se po vyjmutí budou chovat velmi podobně.

2.5 V dusíku namočený suchý kapesník

Pomůcky: Papírový kapesník.
Provedení: Namočte suchý papírový kapesník do kapalného dusíku a pak vyjměte. Kapesník bude chvíli nemačkavý (jako silon).
Vysvětlení: Kapesník je v tomto stavu udržován intenzivním proudem par dusíku, které jej po nějakou dobu roztahují.
Dodatek: Kapesník nemačkejte příliš vehementně, dusík se rychle vypařuje, takže mačkavost přichází celkem záhy. Je rovněž dobré si vyzkoušet, jak kapesník složit, aby byl efekt dobře vidět (mně se osvědčilo složení na podlouhlý proužek).

2.6 V dusíku namočený mokrý kapesník

Pomůcky: Papírový kapesník, nádoba s vodou, kladivo.
Provedení: Papírový kapesník nejdříve namočte do vody a pak do dusíku. Po vytažení ho lze rozbít kladivem.
Vysvětlení: Podobně jako u pokusu 2 – led je křehký a rozbíjí i „kapesníkové“ vazby.
Dodatek: Pokud namočíte kapesník více, je nutné jej déle chladit – efekt pak ale bude větší.

2.7 „Suchý“ balónek

Pomůcky: Gumový (pouťový) balónek, kladivo.
Provedení: Ponořte suchý gumový balónek do dusíku a nechte ho v něm zhruba 1 min. Po vytažení ho lze rozbít kladivem, i když neobsahuje vodu.
Vysvětlení: Guma při ochlazení křehne díky tomu, že dlouhé zapletené molekuly, které gumu tvoří, se zkracují a rozmotávají.

2.8 Ledová koule

Pomůcky: Kovová koule či závaží, provázek či tenký drát, průhledná nádoba s vodou (např. akvárium).
Provedení: Zchlaďte v dusíku kovový předmět (uvázaný např. na provázku), rychle jej vyjměte a ponořte do vody (může mít pokojovou teplotu, ale čím chladnější, tím lépe) a pozorujte. Na kouli se objeví ledová slupka, která viditelně roste.
Vysvětlení: Tepelná kapacita koule stačí na to, aby ochladila vodu v jejím okolí pod bod tuhnutí.

Dodatek: Pokud jako nádobu s vodou použijete větší kulatou kádinku, při ponoření se bude koule zdát větší (funguje to jako spojná čočka) a bude tedy lépe vidět. Na druhou stranu to trochu odvádí od samotného zajímavého efektu rychlého zamrzání koule do ledu.

2.9 Zmrzlina

Pomůcky: 1 l mléka, 1 kg moučkového cukru, 3 vaječné žloutky, 1 l smetany, 2× vanilínový cukr, nastrouhaná čokoláda – množství a typ podle chuti (např. 100 g s drcenými ořechy).

Provedení: Všechny ingredience dejte do vhodné nádoby (např. plechové mísy), nejprve řádně promíchejte, nejlépe elektrickým šlehačem nebo v mixéru, a pak postupně za stálého a intenzivního míchání (např. lžící) pomalu přilévejte dusík. Vznikne zmrzlina.

Dodatek: Pozor, spotřeba dusíku je poměrně velká, ale jinak se kulinářským nápadům a variacím meze v podstatě nekladou. :-)

3 Zvětšování objemu dusíku při přechodu kapalina-plyn

3.1 Bouchající krabička

Pomůcky: Uzavíratelná plastová krabička od kinofilmu, chemické kleště.

Provedení: Chyťte krabičku do kleští, naplňte tak do jedné čtvrtiny dusíkem a pevně zaklapněte víčko. Víčko během chvilky rychle vyskočí (pozor, nenaklánět se nad něj!).

Vysvětlení: Dusík se při přechodu z kapalného do plynného skupenství enormně rozpíná (stejně jako velmi mnoho dalších látek) a díky velkému rozdílu teplot kapalného dusíku a místnosti (zhruba 200 °C = 200 K) je tento proces velmi rychlý.

Dodatek: Při správném provedení skáče víčko celkem daleko, proto je vhodné si krabičku a víčko spojit tenkým provázkem. Lze použít i jinou plastovou krabičku (např. na potraviny) nebo i krabičku od Kindervajíčka (pozor, nesmí držet příliš pevně).

3.2 Balónek na baňce

Pomůcky: Gumový balónek, Erlenmayerova baňka.
Provedení: Nalijte kapalný dusík do baňky a navlékněte gumový balónek na její hrdlo. Balónek se nafukuje.
Vysvětlení: Ohřívání kapalného dusíku způsobuje jeho vypařování a zvětšování objemu.
Dodatek: Je dobré si navlékání balónku na kádinku nacvičit předem i přesto, že s podobnými úkony máte zkušenosti.

3.3 Výbuch v ruce

Pomůcky: Gumový balónek, nálevka, odměrná zkumavka či kádinka (není nutná).
Provedení: Nalijte do připravené kádinky odměřené množství kapalného dusíku, vsuňte hrdlo nálevky do balónku, vlijte do ní dusík a pevně chyťte hrdlo míčku mezi prsty (obtočit) – míček se nafukuje a nakonec praskne. Pozor, při správném provedení je rána značná!
Vysvětlení: Stejné jako u předchozí demonstrace.
Dodatek: Nalijte-li do míčku dusíku příliš, prasknutí nebude tak silné, pokud málo, bude nafukování balónku trvat dlouho a nakonec nemusí ani prasknout. Je nutné to odzkoušet dopředu, balónky od různých výrobců mají různou kvalitu. Zkuste nejprve cca 5 ml. Rovněž úchop balónku s dusíkem uvnitř je poměrně náročný – ideální je, když se vám podaří jeho hrdlo obtočit dvakrát kolem prstu. Pozor na větší polití dusíkem – občas to pálí ;-) Tento pokus lze dělat například i nalitím dusíku do PET láhve, nasazením balónku a pečlivým zavázáním – riziko popálení je tak o mnoho menší.

3.4 Rotující míčky na pingpong

Pomůcky: Pingpongový míček s dírkami po obvodu (dokonce stačí i míček jen s jednou dírkou mimo obvod), plechová mísa či oválný tác.
Provedení: Úplně ponořte pingpongový míček do dusíku a nechte asi 2,5 min. Umístíte-li poté míček na tác, roztočí se (tác je tam pouze kvůli jeho okrajům, aby míček neutekl).
Vysvětlení: Jsou-li dírky dostatečně malé, dusík zevnitř míčku uniká velkou rychlostí ven – otáčení je reakcí na tryskající páry dusíku (reaktivní pohon).
Dodatek: Někdy je potřeba míčku trochu pomoci tím, že do něj mírně strčíme. Můžete si míček pomalovat různými barvami, které se při rychlé rotaci míčku „slijí“ v jinou (např. žlutá a modrá v zelenou). Při dělání dírek do pingpongového

míčku je dobré mírně nahřát špičku špendlíku a velmi zešikma a pomalu dírkovat. Dírka by měla být co nejmenší (Bernoulli).

3.5 Exploze láhve

Pomůcky: Pevná plastová láhev (vhodná např. 0,5 l láhev od Coca-Coly).
Provedení: Na širším prostranství nalijte trochu kapalného dusíku do plastové láhve (cca 1/10 objemu), pořádně utáhněte víčko a odstupte cca 10 metrů. Po nějaké chvíli nastane velká rána, vypařující se dusík láhev roztrhá.
Dodatek: Pozor, k láhvi nechoďte blíže, dokud nenastane výbuch – pokud nenastává třeba i 5 minut, raději ještě alespoň 10 minut počkejte, než se k láhvi přiblížíte. Pokud uslyšíte jasné syčení signalizující, že je láhev nedobře uzavřena, počkejte až dosyčí. Pěkný efekt vytvoří obměna tohoto pokusu s vodou – použijte pevný plechový kbelík a naplňte ho vodou, přivažte na plastovou láhev závaží a experiment opakujte s tím, že zatíženou láhev s dusíkem vhodíte do vody. Pozor, vypařování je v tomto případě rychlejší, takže od kbelíku raději spěchejte. Tuto demonstraci je vhodné dělat na konci „představení“ – je nutný otevřený prostor, nedělejte v uzavřených místnostech!

4 Zmenšování objemu plynu při ochlazování

4.1 Balónková taška a magické ruce

Pomůcky: Větší mísa (např. salátová), gumový balónek.
Provedení: Nafoukněte balónek, dejte do mísy a polijte ho dusíkem. Balónek se začne smršťovat. Po vyjmutí z mísy se začne opět nafukovat.
Vysvětlení: Vzduch (z největší části dusík a kyslík) v balónku se ochladí a významně zmenší svůj objem až oba plyny skondenzují (kyslík kondenzuje při $182,95$ ° (90,20 K), tj. o zhruba 13 °C výše než dusík). Po zahřívání zpět na pokojovou teplotu nabývá zpět svého původního objemu.
Dodatek: Balónek můžete nechat v míse a mezitím dělat další pokusy, balónek se bude nafukovat až po chvíli. Všimněte si, že plyn v balónku se ochlazuje daleko rychleji než pevná tělesa. Vezmete-li balónek opatrně do rukou, bude nabývat původní objem mnohem rychleji.

4.2 Zmuchlaná PETka

Pomůcky: Větší mísa, PET láhev.

Provedení: Pečlivě uzavřete PET láhev, dejte do mísy a polijte ji dusíkem. Láhev se začne deformovat, jako kdyby byla vysávána vývěvou.
Vysvětlení: Jak vzduch v láhvi kapalní, smršťuje se a tlak okolní atmosféry PET láhev deformuje.

4.3 Nasátí kondomu

Pomůcky: Erlenmayerova baňka (větší), gumový balónek či kondom.
Provedení: Na baňku nasaďte balónek a ponořte do dusíku. Balónek je nasáván do baňky.
Vysvětlení: Vzduch v baňce zmenšuje svůj objem a vnější atmosféra tak balónek vhání dovnitř.
Dodatek: Užijete-li větší kádinku a kondom (kvůli navléknutí na široké hrdlo), je efekt větší.

5 Leidenfrostův jev

5.1 Kapky na podnosu

Pomůcky: Kovový podnos.
Provedení: Vylijte trochu kapalného dusíku na kovový („stříbrný“) podnos – dusík se rozpadne do mnoha „tancujících“ kapek.
Vysvětlení: Kapky kapalného dusíku oddělují od stolu, který je pro ně velmi „horký“, překotně vznikající páry dusíku. Tyto páry jsou o mnoho chladnější než samotný stůl, proto se kapky nevypaří po poměrně dlouhou dobu. Jejich volný pohyb je dán tím, že pohyb kapek po dusíkových parách velmi účinně eliminuje tření (podobně jako vzduchový polštář u vznášedel). Jev je analogický jevu, kdy kapka vody vydrží na rozpálené plotýnce také poměrně dlouho „tancovat“ (kapalnou vodu odděluje od velmi horké plotny pára, jejíž teplota je o dost nižší než teplota plotny). Tomuto jevu se říká Leidenfrostův jev. Pěkné je přímé srovnání chování vodních kapek na rozpálené pánvi a dusíkových kapek na hladkém stole.
Dodatek: Nejlépe je vidět přímo, ale pro větší třídy lze použít i kvalitní vizualizér či webkameru a promítat přes dataprojektor na velké plátno. Není-li podnos, lze pozorovat i na hladkém stole či hladké podlaze (pozor, příliš mnoho kapalného dusíku nedělá dobře dýhám a některým druhům lin, ale pokud se na ně dusík vylévá vždy pouze v malém množství, nestačí se prakticky vůbec ochladit).

5.2 Křída a setrvačnost

Pomůcky: Křída, rovný pečící plech nebo rovný (čistý a odolný) stůl.
Provedení: Ponořte asi na 1,5 min křídu (čím je pórovitější, tím lépe) do kapalného dusíku, pak ji položte na podložku a lehce do ni cvrnkněte ve vodorovném směru. Křída se chvíli bude pohybovat prakticky bez tření.
Vysvětlení: Vypařování dusíku způsobuje mírné nadnášení křídy – křída se pak pohybuje jako na vzduchovém (dusíkovém) polštáři. Takto lze pěkně (třebaže jen po poměrně krátkou dobu) ilustrovat Princip setrvačnosti (= 1. Newtonův zákon).
Dodatek: Pokud pokus děláte na pečícím plechu, je dobré jej trochu nahřát – proud dusíku z křídy je pak intenzivnější. V takovém případě je ale dobré nechat křídu v dusíku o něco déle, aby dusík nevyprchal příliš brzy.

5.3 Plovoucí zledovatělé bubliny

Pomůcky: Větší nízká krabice nebo pekáč (výška min 5 cm, raději o něco více, ideální polystyrénová, např. z obalu nové pračky), bublifuk.
Provedení: Rozlijte dostatečné množství kapalného dusíku do krabice a foukejte nad ni bubliny. Bubliny nějakou chvíli „plavou na mlze“ a pokud neprasknou, zledovatí.
Vysvětlení: Páry stoupající z rychle se vypařující dusíkové kapaliny udrží bubliny v určité výšce, tj. bubliny se vznáší na parách dusíku a zároveň se rychle ochlazují. Vzhledem k tomu, že hlavní složkou bublin je voda, dojde k jejímu zmrznutí v tomto tvaru.
Dodatek: Je-li krabice papírová, můžete na její dno pro jistotu dát ještě např. pečící plechy, ale není to nezbytně nutné. Je třeba vyzkoušet bublifuk, jehož bubliny tak snadno nepraskají (komerční bublifuky netvoří zrovna odolné bubliny – lépe si namíchat vlastní medicínu, například tím, že do komerčního bublifuku budete opatrně přidávat glycerin a jar).

6 Experimenty s kapalným kyslíkem

6.1 Zkapalňování vzduchu

Pomůcky: Gumový balónek, větší Erlenmayerova baňka.
Provedení: Ponořte prázdnou baňku s balónkem nasazeným na hrdle do kapalného dusíku (zhruba na 5 min). Po vyjmutí baňky lze na dně zaznamenat kapalinu.
Vysvětlení: Ze vzduchu se vysráží nejen dusík, ale rovněž kyslík.

Dodatek: Vodní pára obsažená ve vzduchu při tak nízkých teplotách mrzne na led, kyslík tuhne zhruba při -219 °C. Čím větší baňka (lze použít i velký pouťový balónek), tím více kapalného vzduchu v něm bude.

6.2 Ďábelské kapky

Pomůcky: Stojan, plechovka 0,5 l (od nápoje), sirky, líh, kousek hadříku.
Provedení: Upevněte plechovku na stojan tak, aby její osa svírala se svislicí úhel zhruba 30°. Nalijte do plechovky dusík a počkejte, až se na spodu plechovky začnou vytvářet kapky kyslíku. Nechte kapky skapávat na hořící hadřík. Při každé kapce se hadřík více rozhoří.
Vysvětlení: Hoření potřebuje ke svému průběhu kyslík. Při hoření se kyslík ze vzduchu spotřebovává a vznikají zplodiny – výsledný plamen tak má méně kyslíku. Kapalný kyslík je dodáván plamenům přímo.

7 Viditelné páry

7.1 Kouř z nosu

Pomůcky: Sušenka neobsahující mnoho vody (např. piškot).
Provedení: Pokud sušenku krátce namočíte do dusíku a se zavřenou pusou rozkoušete, půjde vám z nosu „kouř“.
Vysvětlení: Kapalný dusík se nasákne do sušenky a po vyjmutí se okamžitě začne vypařovat, dusíkové páry jsou chladné a ochlazují vodní páry, které jsou ve výdechu přítomny. Oním „kouřem“ jsou pak vodní páry zviditelněné vysráženými kapičkami, jde tedy o mlhu.
Dodatek: Je lepší mít vlhko v puse – například se před pokusem napijte. Sušenku nenechávejte v dusíku dlouho, abyste předešli „popálení“ jazyka, polykejte až když sušenka přestane „pálit“ (jinak raději vyplivněte).

7.2 „Diskopára“

Pomůcky: Vyšší odměrný válec, horká voda (resp. voda z kohoutku + varná konvice).
Provedení: Nalijte kapalný dusík do odměrného válce zpola naplněného horkou vodou. Vznikne překotná tvorba chladné mlhy.
Vysvětlení: Jde o větší obdobu výše uvedeného. Kapalný dusík se začne při styku s o mnoho teplejší vodou urychleně vypařovat (teplotní rozdíl je bezmála rozdíl

300 °C), páry dusíku ochlazují vodní páry, kterých je nyní velké množství a které za normálních okolností nejsou vidět, a sráží je.

Dodatek: Není nutné mít odměrný válec, stačí i hrníček či sklenička (pozor a prasknutí), nicméně v odměrném válci je efekt velmi pěkný. Vody s trochou dusíku se lze i napít (pára z nosu), ale je nutná velká opatrnost, protože část vody může být velmi chladná a část vody je velmi horká a je zde možnost popálení si trávící trubice. Rovněž překotně se vypařující kapalina v trávící trubici či dokonce v žaludku nemusí být každému příjemná.

7.3 Hrnečku vař

Pomůcky: Větší nádoba (kbelík, mísa, ...), horká voda, větší množství přípravku na mytí nádobí či náplň do bublifuků.

Provedení: Nalijte kapalný dusík do kbelíku a potom současně s dvojnásobným množstvím horké vody chrstněte do kbelíku i bublifuk. Nastane mlžný výbuch a z kbelíku se vyvalí bubliny naplněné mlhou.

Vysvětlení: Prakticky stejné jako v předchozím.

Dodatek: Nenaklánějte se nad kbelík, mohli byste se opařit. Připravte si hadr a kbelíky na vytírání podlahy :-)

7.4 Velká bublina na míse plné páry

Pomůcky: Větší nádoba (kbelík, mísa, ...), horká voda, větší množství přípravku na mytí nádobí či náplně do bublifuků.

Provedení: Nalijte kapalný dusík do odměrného válce zpola naplněného teplou vodou. Vznikne překotná tvorba chladné mlhy.

Vysvětlení: Kapalný dusík se začne při styku s o mnoho teplejší vodou urychleně vypařovat, páry dusíku jsou ale velmi prosyceny kapičkami dusíku a hlavně vody, které je dělá viditelnými (kouř).

Dodatek: Není nutné mít odměrný válec, stačí i hrníček či sklenička (pozor a praskutí), nicméně v odměrném válci je efekt velmi pěkný. Vody s trochou dusíku se lze i napít (pára z nosu), ale je nutná velká opatrnost, protože voda může být velmi chladná a je zde možnost popálení si trávící trubice. Rovněž překotně se vypařující kapalina v trávící trubici či dokonce v žaludku nemusí být každému příjemná.

8 Různé další

8.1 Dusík v mikrovlnce

Pomůcky: 4 stejné kalíšky, voda, mikrovlnná trouba.
Provedení: Do dvou kalíšků dejte dusík a dva naplňte vodou. Jeden po jednom kalíšku z dusíkem a s vodou umístěte do mikrovlnné trouby – voda se ohřeje, dusík nikoli. Srovnejte.
Vysvětlení: Molekula vody je polární a mikrovlny mají tu správnou frekvenci na snadné rozkmitání jí. Dusíkové molekuly polární nejsou.

8.2 Zamrznutí pole

Pomůcky: Magnet, vysokoteplotní supravodič.
Provedení: Ochladíte-li vysokoteplotní supravodič pod tzv. kritickou hodnotu, vykazuje zvláštní jev „zamrznutí magnetických indukčních čar“. Do takového magnetického pole můžeme umístit válcově symetrický magnet, který nejenže zůstane v dané poloze, ale v této poloze se může otáčet prakticky bez tření (pouze odpor vzduchu).
Vysvětlení: Vysvětlení není úplně jednoduché, podívejte se například na `http://www.fzu.cz/popularizace/supravodivost-a-levitace`.

Mnohostěny

Ivana Machačíková, Josef Molnár
Gymnázium Zlín – Lesní čtvrť, machacikova@gymzl.cz
Univerzita Palackého v Olomouci, josef.molnar@upol.cz

V úvodní geometrické části pracovní dílny (workshopu, modulu, projektu) se seznámíme s informacemi souvisejícími s pojmem mnohostěn, případně si je procvičíme:

Mnohostěny

- **mnohostěn** je chápán jako část prostoru ohraničená konečným počtem rovinných mnohoúhelníků.

- Geometrický útvar nazveme **konvexní**, právě když lze libovolné dva jeho body spojit úsečkou, jejíž každý bod náleží danému geometrickému útvaru. Mnohostěn je konvexní, je-li průnikem všech svých opěrných poloprostorů, přičemž hraniční rovinou opěrného poloprostoru se rozumí rovina, v níž leží stěna daného mnohostěnu.

- **Eulerova věta** (Leonhard Euler, 1707–1783): V každém konvexním mnohostěnu platí
$$s + v - h = 2,$$
kde s je počet stěn, v počet vrcholů a h počet hran daného konvexního mnohostěnu. (Cvičení: Nalezněte nekonvexní mnohostěny splňující (nesplňující) uvedený vztah. Dokažte, že v konvexním čtrnáctistěnu s devíti vrcholy vychází aspoň z jednoho vrcholu aspoň 5 hran.)

- **Platónovým tělesem** (pravidelný mnohostěn, PT) (Platón, 427–347 př. n. l.) nazveme konvexní mnohostěn ohraničený shodnými pravidelnými konvexními rovinnými mnohoúhelníky (p-úhelníky), přičemž z každého jeho vrcholu vychází týž počet hran (valence vrcholu - q). (Cvičení: Dokažte, že existuje právě pět PT. Demonstrujte princip duality PT. Určete počty rovin souměrnosti všech PT. Na kolik částí se PT rozpadnou, provedeme-li všechny tyto řezy současně? Kolik prvků mají grupy zákrytových pohybů PT?)

- **V pythagorejském pojetí světa** (Pythagoras ze Samu, okolo 570 př. n. l.) představují PT symboly pěti živlů: vzduch – oktaedr, země – krychle, oheň –

tetraedr, voda – ikosaedr, universum – dodekaedr). Keplerovým kosmickým pohárem je nazývána kosmologická teorie, v níž Johanes Kepler (1571–1630) předpokládal, že se tehdy známé planety pohybují po kružnicích na sférách, mezi něž lze vložit (opsat a vepsat) PT takto: mezi sféru Merkuru a Venuše oktaedr, Venuše a Země ikosaedr, Země a Marsu dodekaedr, Marsu a Jupitera tetraedr a konečně mezi sféry Jupitera a Saturnu krychli.

- **Deltatopy** získáme, vynecháme-li v definici PT požadavek na stejnou valenci vrcholů a za mnohoúhelníky budeme považovat jen trojúhelníky. Existuje právě 8 deltatopů.

- **Archimédova tělesa** (polopravidelné mnohostěny) (Archimédes ze Syrakus, 287–212 př. n. l.) lze vytvořit z PT odříznutím vrcholů nebo hran tak, aby vznikly pravidelné shodné konvexní mnohoúhelníky.

- **Hvězdicovité pravidelné mnohostěny** dostaneme, vypustíme-li v definici PT podmínky konvexity.

- **Antiprisma (antihranol)** se nazývá mnohostěn, který má dvě protilehlé stěny (podstavy) tvořené shodnými pravidelnými n–úhelníky a ostatní stěny jsou shodné rovnoramenné trojúhelníky.

×	**Název deltatopu**	**v**	**h**	**s**	**q = 3**	**q = 4**	**q = 5**
1.	čtyřstěn	*4*	*6*	*4*	*4*	*0*	*0*
2.	dvojitý čtyřstěn	*5*	*9*	*6*	*2*	*3*	*0*
3.	osmistěn	*6*	*12*	*8*	*0*	*6*	*0*
4.	dvojitý pětiboký jehlan	*7*	*15*	*10*	*0*	*5*	*2*
5.	siamský dvanáctistěn	*8*	*18*	*12*	*0*	*4*	*4*
6.		*9*	*21*	*14*	*0*	*3*	*6*
7.		*10*	*24*	*16*	*0*	*2*	*8*
8.	dvacetistěn	*12*	*30*	*20*	*0*	*0*	*12*

Tabulka 1: Deltatopy

V chemii se s mnohostěny setkáváme zejména v souvislosti s tvary krystalů a také při studiu prostorového uspořádání molekul.

Krystaly

- **Krystal** je přirozeně vzniklé těleso vyznačující se pravidelným geometrickým tvarem a rovinnými plochami. Plochy krystalů i jimi proložené roviny charakterizujeme pomocí tří os a úseků a, b, c, které na nich krystalové roviny vytínají.

Vnitřní stavba (struktura) krystalů je dána uspořádáním nejmenších stavebních částic (tj. atomů, iontů či molekul). Vnější tvar a souměrnost krystalu nerostu jsou odrazem jeho vnitřní stavby. Krystaly mohou být souměrné podle rovin, os a středu souměrnosti.

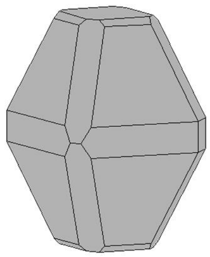
- **Rovina souměrnosti** rozděluje krystal na dvě zrcadlově stejné části.

- **Osa souměrnosti** je myšlená přímka vedená středem krystalu. Při otáčení kolem této osy o $360\,°$ se krystal opětovně dostává do polohy shodné s výchozí pozicí. Podle toho, kolikrát se při otočení o celý kruh docílí shoda s výchozí polohou, rozeznáváme dvojčetné, trojčetné, čtyřčetné a šestičetné osy souměrnosti.

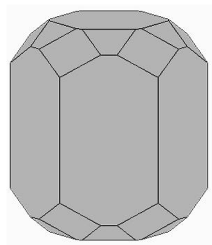
- Krystal má **střed souměrnosti**, pokud každá jeho plocha má odpovídající protiplochu. (Protiplocha je shodná a rovnoběžná s výchozí plochou a je otočená kolem myšleného středu o $180\,°$.)

- Uvedené prvky souměrnosti se na krystalech vyskytují v určitých kombinacích, existuje 32 možných kombinací prvků souměrnosti. Každá z těchto kombinací je charakteristická pro jedno **krystalové oddělení**, krystalových oddělení je tedy 32. Krystalová oddělení se rozdělují do sedmi krystalových soustav. Každá krystalová soustava má tzv. **holoedrické oddělení**, které má maximální možnou symetrii v dané soustavě.

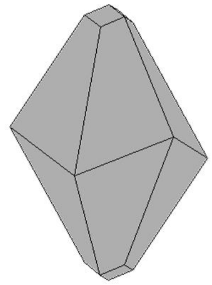
Podle symetrie můžeme krystaly rozdělit do následujících sedmi **krystalových soustav**: **trojklonná** (triklinická), **jednoklonná** (monoklinická), **kosočtverečná** (rombická, obr. 1), **čtverečná** (tetragonální), **šesterečná** (hexagonální, obr. 2), **klencová** (trigonální, obr. 3), **krychlová** (kubická, obr. 4).
Holoedrické oddělení krychlové soustavy má nejvyšší možnou symetrii ze všech 32 krystalových oddělení. Počet prvků souměrnosti v tomto oddělení je 23 – devět rovin souměrnosti, tři čtyřčetné osy, čtyři trojčetné osy, šest dvojčetných os a střed souměrnosti.



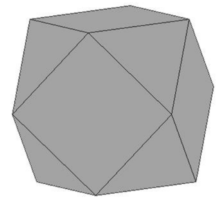
Obrázek 1: síra



Obrázek 2: apatit



Obrázek 3: kalcit



Obrázek 4: halit

z	a + b	tvar molekuly	příklad
4	4 + 0	tetraedr	CH_4
4	3 + 1	trigonální pyramida	NH_3
5	5 + 0	trigonální bipyramida	PCl_5
5	4 + 1	nepravidelný tetraedr	SF_4
6	6 + 0	oktaedr	SF_6
6	5 + 1	čtvercová pyramida	BrF_5
7	7 + 0	pentagonální bipyramida	IF_7

Tabulka 2: Příklady prostorového uspořádání jednocentrických molekul.

Tvary molekul

Geometrické uspořádání jednocentrických molekul lze popsat pomocí metody repulze valenčních elektronových párů (metoda VSEPR). Tato metoda předpokládá, že volné i vazebné elektronové páry se okolo centrálního atomu uspořádají tak, aby jejich vzdálenost byla maximální. V každé molekule, jejíž prostorový tvar určujeme, označíme: a – počet σ vazeb, b – počet volných elektronových párů centrálního atomu, z – součet počtu σ vazeb a volných elektronových párů centrálního atomu, tedy $z = a + b$. V důsledku odpuzování elektronových párů je pro $z = 2$ molekula **lineární**, pro $z = 3$ má molekula tvar **rovnoramenného trojúhelníku**. Pro větší hodnoty z mohou mít molekuly tvar mnohostěnu. Příklady těchto tvarů jsou uvedeny v tabulce č. 2.

S PT se setkáváme i u molekul některých prvků, např. molekula bílého fosforu P_4 má tvar pravidelného čtyřstěnu, molekula boru B_{12} má tvar pravidelného dvacetistěnu. Tvar mnohostěnů mají i molekuly fullerenů, např. molekula fullerenu C_{60} má tvar fotbalového míče (Archimédovo těleso, obr. 5).

V rámci pracovních dílen vyrábíme se žáky model **„nekonečného nekonvexního**

mnohostěnu" – mříže, jejíž všechny stěny jsou shodné rovnostranné trojúhelníky a z každého vrcholu vychází 7 hran. Sestavovaná mříž se skládá z ikosaedrů propojených „tunely", přičemž tunel tvoří pravidelný oktaedr, tedy trigonální antiprisma. Zájemci se mohou seznámit i s teoretickým podkladem ve formě zjednodušených poznatků z topologie.

Poincarého zobecnění Eulerovy věty

Pro mnohostěny platí

$$s + v - h = 2 - 2r, \tag{1}$$

kde r je (topologický) **rod plochy**. Zjednodušeně lze říci, že hodnota rodu plochy je rovna počtu v ní existujících „průchodů", viz obr. 6.
Vzhledem k tomu, že jedna hrana mnohostěnu je spojnicí dvou vrcholů a současně průsečnicí dvou stěn, platí vztah

$$ps = 2h = qv.$$

Užitím substitucí $h = \frac{1}{2}ps$ a $v = \frac{ps}{q}$ dostáváme z (1) vztahy

$$v = 4\frac{p(r-1)}{pq - 2p - 2q}, \quad s = 4\frac{q(r-1)}{pq - 2p - 2q}, \quad h = 2\frac{pq(r-1)}{pq - 2p - 2q} \tag{2}$$

Pro $r = 0$ z (1) vyplývá, že

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{1}{h} > \frac{1}{2}.$$

Z (2) pro $r = 0$ pomocí jednoduchého tabulkového procesoru ukážeme, že existuje právě pět Platonových těles, a to vyšetřením „všech" možností pro v, s a h.
Pro $r = 2$ z (1) dostáváme

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - 1/h < \frac{1}{2}.$$

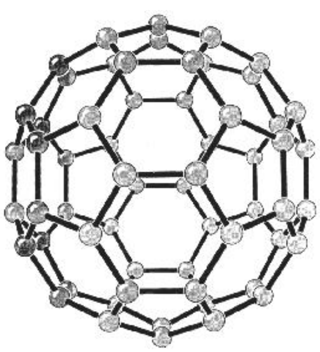
Užitím tabulkového procesoru na (2) získáme pro akceptovatelné hodnoty v, s a h nejvýše 11 možností, které si zasluhují naši pozornost.

Mříže z pravidelných mnohostěnů rodu 2 („nekonečné mnohostěny")

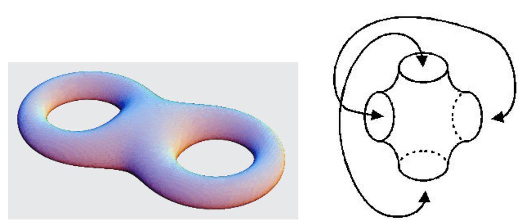
Je však ještě potřeba ukázat, že existují konkrétní příklady pro všechny uvedené možnosti, viz např. [4]. Vytvoříme si společně aspoň mříž 1. druhu , viz obr. 8.

druh	**p**	**q**	**v**	**s**	**h**	**×**
1.	3	7	12	28	42	ikosaedr + 2 otevřené antihranolové tunely
2.	3	8	6	16	24	oktaedr + 2 otevřené antihranolové tunely
3.	4	5	8	10	20	krychle + 2 otevřené krychlové tunely
4.	3	9	4	12	18	tetraedr + 2 otevřené antihranolové tunely
5.	4	6	4	6	12	krychle + 1 otevřený krychlový tunel
6.	5	5	4	4	10	otevřené pentagonální těleso duální samo k sobě
7.	6	4	6	4	12	duální k 5.
8.	9	3	12	4	18	duální k 4.
9.	5	4	10	8	20	duální k 3.
10.	8	3	16	6	24	duální k 2.
11.	7	3	28	12	42	duální k 1.

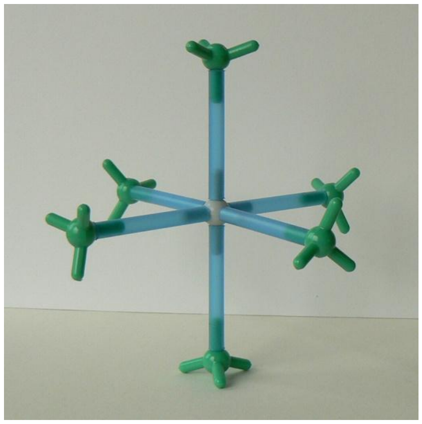
Tabulka 3: Přehled pravidelných mnohostěnů rodu 2



Obrázek 5: fulleren C_{60}



Obrázek 6: objekty rodu 2



Obrázek 7: molekula SF_6

Obrázek 8: mříž 1. druhu

Literatura

[1] BŘEZINA, F. a kol. *Stereochemie a některé fyzikálně chemické metody studia anorganických látek.* Olomouc: UP, 1994.

[2] HELLBERG, J.. *Vývoj chemie jako vyučovacího předmětu vysoké a střední všeobecně vzdělávací školy.* Hradec Králové: PdF, 1979.

[3] HONZA, J., MAREČEK, A. *Chemie pro čtyřletá gymnázia*, 2. díl. Olomouc: Olomouc, 1998.

[4] HUYLEBROUCK, D. Regular Polyhedral Lattices of Genus 2: 11 Platonic Equivalents?. *Bridges Conference Proceedings*. Pécs: 2010.

[5] MOLNÁR, J., KOBZA, J. *Extremálne a kombinatorické úlohy z geometrie.* Bratislava: SPN, 1991.

[6] VACÍK, J. *Obecná chemie.* Praha: SPN, 1986.

[7] VACÍK, J. a kol. *Přehled středoškolské chemie.* Praha: SPN, 1996.

[8] VORÁČOVÁ, Š. *Atlas geometrie.* Praha: Academia, 2012.

[9] ZIMÁK, J. *Mineralogie a petrografie.* Olomouc: UP, 1993.

[10] http://web.natur.cuni.cz/ugmnz/mineral/tvary.html

[11] http://www.zschemie.euweb.cz/uhlik/fulleren.gif

[12] http://mathworld.wolfram.com/DoubleTorus.html

Příspěvek byl vypracován v souvislosti s řešením projektů ESF OP VK: CZ.1.07/2.3.00/09.0040 „Přírodovědec", CZ.1.07/2.3.00/09.0017 „MATES", CZ.1.07/1.2.12/01.0027 „PMT" a CZ.1.07/1.2.08/02.0017 „Práce s talenty" a byl dále přednesen jako workshop na konferenci Matematyka w przyrodzie - matematyka i przyroda w kształceniu powszechnym, Nowy Sącz 2011, na konferenci Dva dny s didaktikou matematiky, Praha 2012, na Letní škole matematiky a fyziky, Hoštka 2012 a na konferenci Tři dny s matematikou, Ústí nad Orlicí 2012.

O zálibě v číslech

Luboš Pick
katedra matematické analýzy MFF UK, pick@karlin.mff.cuni.cz

Poděkování za inspiraci. K tomuto zamyšlení mě inspirovala Pavla Hofmanová, která mi kdysi sdělila, že jejím oblíbeným číslem je 36.

Poněkud nesouvislý pokus o úvod

Začneme jedním známým bonmotem.

Na světě existují tři typy lidí: ti, kteří dovedou počítat, a ti, kteří počítat nedovedou.

Můžeme ovšem přidat i jeden dosud zcela neznámý bonmot.

Na světě existuje 41 typů lidí: ti, kteří mají nějaké číslo natolik v oblibě, že jej použijí při každé příležitosti, a ti ostatní.

Předcházející motto je samozřejmě naprostá hloupost, ale při troše pozornosti odtud můžete zjistit oblíbené číslo autora tohoto příspěvku. K odůvodnění této volby se ještě vrátíme. Koneckonců, všechna přirozená čísla jsou zajímavá, tak proč ne zrovna 41.

Byl pronesen výrok, že všechna přirozená čísla jsou zajímavá. My matematikové ale musíme všechna svá tvrzení dokázat. Tedy:

Věta 1. *Všechna přirozená čísla jsou zajímavá.*

Důkaz. Předpokládejme pro spor, že tvrzení věty neplatí. To znamená, že existuje alespoň jedno přirozené číslo, které není zajímavé. Pak ale nutně existuje *nejmenší* nezajímavé přirozené číslo. Takové číslo je pak nejmenším přirozeným číslem s jistou pozoruhodnou netriviální vlastností. To jej činí zajímavým. Dostáváme spor. Tím je tvrzení dokázáno. □

Nyní se obrátíme do historie a podíváme se na několik příkladů oblíbenosti či neoblíbenosti některých konkrétních čísel. První příklad je z oblasti vysoké politiky.

Bývalý prezident Spojených států amerických pan Ronald Reagan a jeho žena Nancy si nechali změnit adresu svého domu ze St. Cloud Road 666 na St. Cloud Road 668, a to na základě přesvědčení, že 666 je *ďáblovo číslo*.

Milovníci podobné mystiky mají pro své názory na povahu čísel vždy po ruce obdivuhodnou zásobu podpůrných argumentů, nicméně pohled lidstva na to, které číslo pochází od ďábla, prošel jistým vývojem. Kupříkladu v dřevních dobách starých Keltů byla za ďáblovo číslo považována devítka. Tento fakt se odráží například v textu prastaré písně *The Devil's Courtship*, ve které si ďábel namlouvá dívku pomocí předmětů opředených devítkou, zde je malá ukázka:

> I'll buy you a braw snuff box
> Nine times opened, nine times locked
> If ye'll gang alang wi' me m'dear, if ye'll gang alang wi' me?
>
> You can hae your braw snuff box
> Nine times opened, nine times locked
> For I'll never gang wi' you m'dear, I'll never gang wi' you.
>
> I'll buy you a silken goon
> Wi' nine stripes up and nine stripes doon
> If ye'll gang alang wi' me m'dear, if ye'll gang alang wi' me?

A tak dále. Jestli chcete vědět, zda dívka nakonec podlehne, můžete se zaposlouchat do české verze této skladby (*Ďáblovy námluvy*, český text Jan Lašťovička), která začíná takto:

> Svou krásnou píšťalku ti dám,
> hraje devět tónů na devět stran,
> když půjdeš se mnou, lásko má,
> a když mě budeš chtít ...

Svá oblíbená čísla zpopularizoval v roce 1994 také americký recesista a provokatér Roger Schlafly. Podařil se mu kousek vpravdě husarský, získal totiž patent Spojených států amerických (přesněji řečeno patent číslo 5 373 560) na dvě prvočísla, a sice konkrétně na čísla

7,994,412,097,716,110,548,127,211,733,331,600,522,933,
776,757,046,707,649,963,673,962,686,200,838,432,950,239,
103,981,070,728,369,599,816,314,646,482,720,706,826,018,
360,181,196,843,154,224,748,382,211,019

Obrázek 1

103,864,912,054,654,272,074,839,999,186,936,834,171,066,
194,620,139,675,036,534,769,616,693,904,589,884,931,513,
925,858,861,749,077,079,643,532,169,815,633,834,450,952,
832,125,258,174,795,234,553,238,258,030,222,937,772,878,
346,831,083,983,624,739,712,536,721,932,666,180,751,292,
001,388,772,039,413,446,493,758,317,344,413,531,957,900,
028,443,184,983,069,698,882,035,800,332,668,237,985,846,
170,997,572,388,089

Obrázek 2

Tento příklad nás nenásilnou formou uvádí do světa legislativy a představuje pro nás jisté varování, abychom se nedostali na šikmou plochu. Uvedená dvě čísla totiž podle zákona nyní patří panu Schlaflymu a bez jeho svolení s nimi nikdo nesmí pracovat! Dávejte si tedy dobrý pozor na to, abyste je někdy omylem k něčemu nepoužili! Předpokládám, že pan Roger Schafly chtěl nejspíš pouze poukázat na tupost americké legislativy a pravděpodobně by nás k soudu nepohnal ani kdybychom si kupříkladu jeho dvě čísla pro radost mezi sebou vynásobili, ale kdo ví.

Jiné pozoruhodné mystické číslo se možná skrývá v takzvaném *Richardově paradoxu*, který v roce 1905 objevil francouzský matematik Jules Richard (1862–1956). Po jistých úpravách a hlavně důsledné domestikaci bychom jej mohli zformulovat následujícím způsobem.

Některé české slovní útvary a gramatické věty definují nějaké číslo, zatímco jiné nikoli. Například výraz *rok nástupu Ferdinanda I. Habsburského na český trůn* definuje číslo 1526, zatímco slovní spojení *historický význam Habsburků na českém trůně* žádné číslo nedefinuje. Nyní si tedy můžeme položit otázku, které číslo definuje následující slovní spojení: *nejmenší přirozené číslo, které není možné žádným způsobem definovat pomocí českého slovního útvaru obsahujícího menší počet slov než dvacet*?

Odpověď na tuto otázku se hledá obtížně, neboť ať je toto číslo jakékoli, právě jsme jej definovali pomocí českého slovního útvaru o pouhých devatenácti slovech.

Richardův paradox znamenal významý přínos k vývoji logiky a zejména problematiky výroků odkazujících se na sebe sama.

Mezi kategoriemi čísel, která patřila vždy k široce oblíbeným a vybízela k rozličným hrátkám, rozhodně nelze pominout čísla *palindromatická*. Možností je skutečně přehršel. Nejmenší palindromatické číslo obsahující všech deset číslic je samozřejmě

$$1023456789876543201.$$

Nejmenší palindromatické *prvočíslo* obsahující všech deset číslic je ovšem

$$1023456987896543201.$$

Palindromatické číslo 323323 je součinem pěti po sobě jdoucích prvočísel 7, 11, 13, 17 a 19, a navíc je rovno součtu

$$1^7 + 2^2 + 3^8 + 4^9 + 5^5 + 6^6 + 7^1 + 8^4 + 9^3.$$

Součet druhých mocnin prvních devíti lichých čísel je roven 969. Platí

$$1234321 = 11^2 \cdot 101^2.$$

Nebo

$$1111 = 11^2 + 12^2 + 13^2 + 14^2 + 15^2 + 16^2.$$

A nebo také

$$11111111 = 1234567 \cdot 9 + 8.$$

A ještě

$$\frac{2 \cdot 22 \cdot 222 \cdot 2222}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = 1356531 = 11 \cdot 123321.$$

Představte si, že palindromatické číslo 134757431 splňuje:

$$\begin{aligned}
&=1^7 + 2^3 + 3^8 + 4^5 + 5^4 + 6^2 + 7^1 + 8^9 + 9^6\\
&=1^7 + 2^5 + 3^8 + 4^1 + 5^2 + 6^4 + 7^3 + 8^9 + 9^6\\
&=1^7 + 2^8 + 3^4 + 4^2 + 5^3 + 6^5 + 7^1 + 8^9 + 9^6.
\end{aligned}$$

Povšimněme si, že každá číslice se vyskytuje vždy právě jednou jako základ a právě jednou jako exponent. To jsou věci. Dokažte si v duchu pro radost, že každé palindromatické číslo o sudém počtu číslic je dělitelné 11. A tak dále.

A co třeba megalomani? Ti mají jistě v oblibě *hodně velká čísla*.

Položme si otázku, jak vyrobit snadno a rychle opravdu hodně velké číslo? Možná by se mohly hodit některé zvláště vhodné posloupnosti. Některé posloupnosti totiž rostou opravdu rychle, takže by mohlo stačit vzít něco jako desetitisící člen hodně rychle rostoucí posloupnosti, a možná bychom mohli obdržet nějakého pořádného macka. Tak třeba posloupnosti $\{n^2\}$ nebo $\{n^3\}$ rostou docela rychle. Ještě lepší je $\{n!\}$. Ještě o něco rychlejší je $\{n^n\}$.

Kam se ovšem všechny tyto posloupnosti hrabou na posloupnost *Ackermannových čísel*. Zavedeme nejprve symbol $m \uparrow n$. Podobně jako $mn = m + m + \cdots + m$ (n kopií), označíme

$$
\begin{aligned}
&m \uparrow n = mm \cdots m \quad (n \text{ kopií})\\
&m \uparrow\uparrow n = m \uparrow m \cdots \uparrow m \quad (n \text{ kopií})\\
&m \uparrow\uparrow\uparrow n = m \uparrow\uparrow m \cdots \uparrow\uparrow m \quad (n \text{ kopií})\\
&m \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow n = m \uparrow\uparrow\uparrow m \cdots \uparrow\uparrow\uparrow m \quad (n \text{ kopií})
\end{aligned}
$$

a tak dále. Takto vyzbrojeni definujeme *n-té Ackermannovo číslo* podle modelu

$$1 \uparrow 1, \quad 2 \uparrow\uparrow 2, \quad 3 \uparrow\uparrow\uparrow 3, \quad 4 \uparrow\uparrow\uparrow\uparrow 4, \quad \ldots$$

První Ackermannovo číslo je rovno 1. Druhé Ackermannovo číslo je rovno

$$2 \uparrow\uparrow 2 = 2 \uparrow 2 = 4.$$

Třetí Ackermannovo číslo je rovno

$$3^{3^{3^{\cdots}}},$$

kde počet trojek je roven $3^{3^3} = 7625597484987$. Máte představu, jak velké je čtvrté Ackermannovo číslo? Vedle této posloupnosti vypadá posloupnost $\{n^n\}$ podobně, jako kdybychom se přihlásili na závody Formule 1 na koloběžce.

Zapomněli jsme na *praktické megalomany*. Mezi milovníky velkých čísel se nacházejí jistí specifičtí šťouralové, kteří nám řeknou, že Ackermannova posloupnost není k ničemu dobrá. A postaví nás před vskutku zajímavý problém: jaké je *největší číslo s určitým dobře definovaným významem v matematice*?

Historie zná několik názorů na tuto filosofickou otázku. V roce 1937 prohlásil britský matematický velikán Godfrey H. Hardy (1877–1947), že pravděpodobně největší číslo, které kdy mělo nějaký praktický význam, je takzvané *Skewesovo číslo*

$$10^{10^{10^{34}}}.$$

Toto číslo vzniklo v souvislosti s výzkumem funkce $\pi(x)$, která udává počet prvočísel menších než dané číslo x. Konkrétně šlo o srovnání funkce $\pi(x)$ a funkce logaritmického integrálu $\mathrm{Li}(x)$ definované předpisem

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

Již Gaussovi bylo známo, že

$$\pi(x) \approx \mathrm{Li}(x),$$

jinými slovy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} = 1,$$

tedy že hodnoty obou funkcí se k sobě pro velká x blíží. Dlouho ale nikdo nebyl schopen rozhodnout, která z těchto dvou funkcí je větší. Snadno lze spočítat, že pro malá přirozená čísla x převažuje funkce $\mathrm{Li}(x)$. Britský matematik John Edensor Littlewood (1885–1977), Hardyův současník a kolega, ale už v roce 1914 dokázal, že tomu tak není pro všechna čísla, přesněji řečeno, že jednou se karta obrátí. Littlewood dokázal, že existuje nějaké (asi dost velké) přirozené číslo n_0 takové, že $\pi(n) > \mathrm{Li}(n)$ pro všechna n větší než n_0. Nevěděl však, jak je toto číslo n_0 velké. A právě Littlewoodův žák, jihoafrický matematik Stanley Skewes (1899–1988), v roce 1933 určil pro tuto hodnotu horní odhad. Konkrétně dokázal, že za předpokladu Riemannovy hypotézy je horním odhadem Littlewoodova čísla n_0 hodnota

$$e^{e^{e^{79}}},$$

což je přibližně výše uvedené Skewesovo číslo. Dlužno dodat, že v roce 1955 se již Skewes dokázal obejít bez dodatečného předpokladu Riemannovy hypotézy.

Vada na kráse tohoto přístupu ale spočívá v tom, že Skewesovo číslo představuje pouze horní odhad hodnoty, u které začíná převažovat funkce $\pi(x)$ nad funkcí $\mathrm{Li}(x)$. Tudíž je možné tuto hodnotu postupně zlepšovat (tedy pochopitelně zmenšovat), zejména díky překotnému vývoji výpočetní techniky. Kupříkladu je známo, že jej lze s úspěchem nahradit podstatně menší hodnotou 10^{1167}.

A tím samozřejmě vzniká nová otázka (mohl by nám ji položit například praktický a zároveň skeptický megaloman): jaké je největší *nezlepšitelné číslo* obdařené nějakým praktickým významem?

Těžko říci, každopádně velmi nadějným kandidátem na tuto poctu by mohl být například řád grupy zvané *monster simple group*, jenž činí pouhých

$$808017424794512875886459904961710157005754368000000000.$$

A teď k číslu 41

Mým oblíbeným číslem je 41. Je o něco větší než Pavlino číslo 36, ale zase je o něco menší než třeba Skewesovo číslo. Má obliba této hodnoty pramení z následujícího úkolu.

Úloha: Najděte alespoň jedno přirozené číslo $n < 41$ takové, aby

$$n^2 + n + 41$$

nebylo prvočíslo.

Mám zkušenost, že zadáte-li někomu tuto úlohu, pak od něj budete mít na chvilku pokoj. Většinou si nejprve projede prvních pár hodnot n v duchu, ti houževnatější si pak vezmou papír a tužku a vesele počítají.

Rád bych poznamenal, že uvedené zadání je mojí modifikací původní úlohy, která požadovala nalézt alespoň jedno přirozené číslo $n < 41$ takové, aby

$$n^2 - n + 41$$

nebylo prvočíslo. A hlavně, že moje modifikace je mnohem lepší než původní úloha, protože má pozitivní vyznění. Původní úloha totiž žádné řešení nemá, zatímco moje ano. Polynom

$$n^2 - n + 41$$

totiž dává pro $n = 1, \dots, 40$ následující seznam hodnot:

$$41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131,$$
$$151, 173, 197, 223, 251, 281, 313, 347, 383, 421,$$
$$461, 503, 547, 593, 641, 691, 743, 797, 853, 911,$$
$$971, 1033, 1097, 1163, 1231, 1301, 1373, 1447, 1523, 1601,$$

a můžete mi věřit (a nebo se přesvědčit), že všechna tato čísla jsou prvočísla.

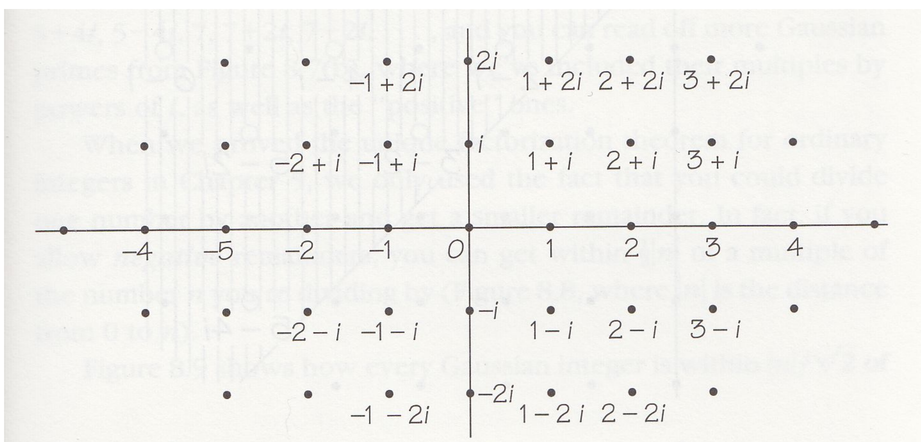
Jedinečný půvab čísla 41 ovšem spočívá v tom, že je to *největší* přirozené číslo s touto vlastností. Buďme přesnější: číslo 41 je největším přirozeným číslem k, pro které jsou *všechny* hodnoty polynomu

$$n^2 - n + k$$

pro $n = 1, \ldots, k - 1$ prvočísla.

Jak se na to dá přijít?

Začneme v Gaussově komplexní rovině. *Gaussovým celým číslem* nazveme každé komplexní číslo tvaru $a + bi$, kde a a b jsou celá (viz obr. 3).



Obrázek 3

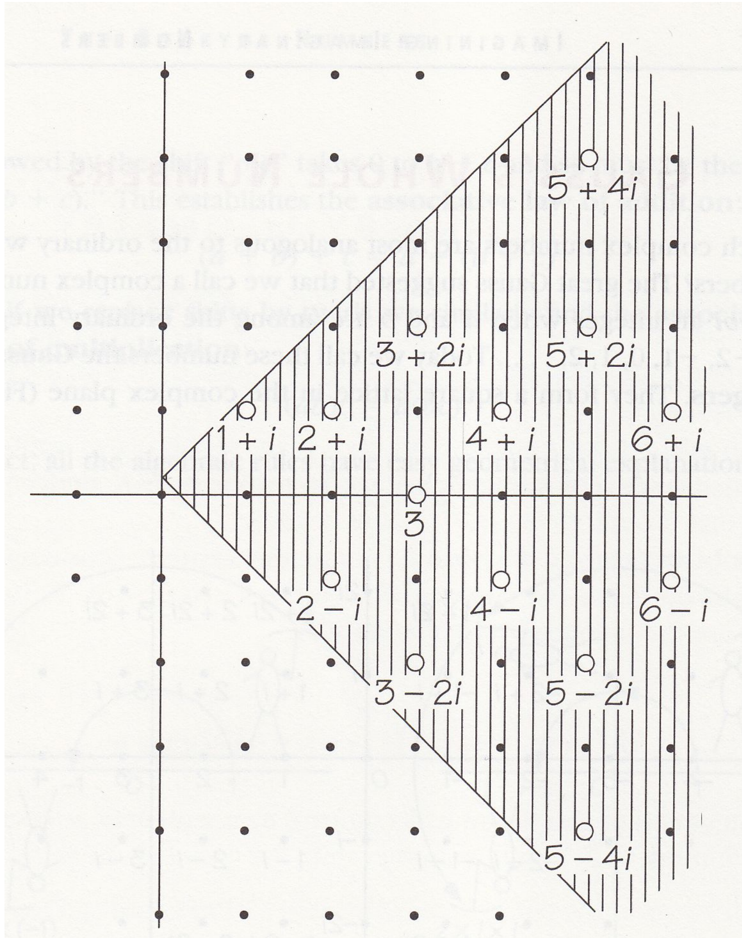
Pro *obyčejná* celá čísla známe následující větu.

Každé kladné nebo záporné celé číslo lze jednoznačně zapsat ve tvaru součinu nějaké mocniny čísla (-1) *a mocnin kladných prvočísel.*

Podobné tvrzení platí i pro Gaussova celá čísla.

Každé nenulové Gaussovo celé číslo lze jednoznačně zapsat ve tvaru součinu nějaké mocniny čísla i *a mocnin kladných Gaussových prvočísel.*

Zní to hezky, ale potřebujeme k tomu maličkost: zjistit, co je to *kladné Gaussovo prvočíslo*. Odpověď nalezneme na obr. 4.

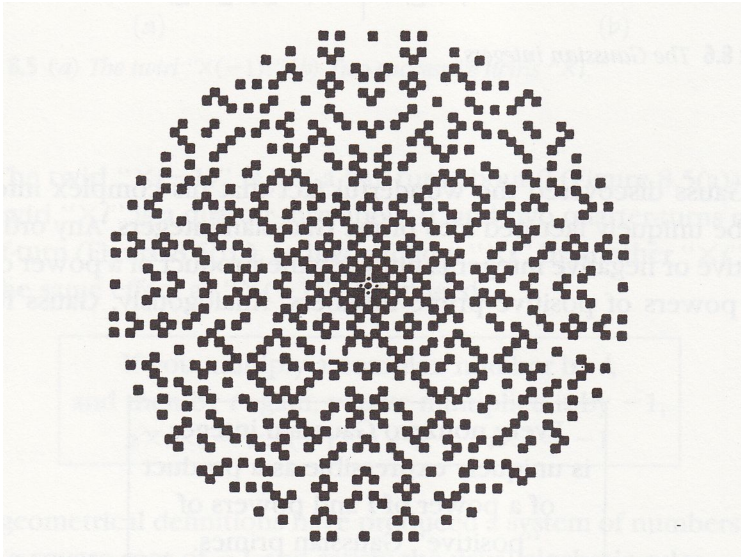


Obrázek 4

Vynásobíme-li Gaussova kladná prvočísla nějakou mocninou i, dostaneme situaci znázorněnou na obr. 5.
Bude užitečné povšimnout si jistého rozdílu mezi Gaussovými prvočísly a obyčejnými prvočísly. Některá obyčejná prvočísla zůstávají prvočísly i v Gaussově rovině, ale jiná nikoli. Například číslo 3 je prvočíslem obyčejným i Gaussovým, ale čísla 2 či 5 Gaussovými prvočísly nejsou.

Položme si otázku, proč není číslo 2 Gaussovým prvočíslem? Tentokrát je odpověď velice snadná: protože

$$2 = (1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2.$$



Obrázek 5

Zkusme tedy něco těžšího. Je nebo není číslo 13 Gaussovým prvočíslem? (Obrázek tak daleko nesahá . . .)

Připomeňme si nejprve základy modulární aritmetiky. Řekneme, že číslo m je *kongruentní* číslu n *modulo* číslo p, zapisujeme

$$m \equiv n (\operatorname{mod} p),$$

jestliže $m - n$ je dělitelné číslem p.

Modulární aritmetiku používá denně každý. Pokud řeknete doma, že se vrátíte v pět, míněno pět odpoledne, tak jste právě použili aritmetiku modulo 12. Jde tedy o nesmírně praktickou záležitost.

V modulární aritmetice můžeme sčítat a násobit. Příklady: $5 + 3 = 1 (\operatorname{mod} 7)$, $2 \cdot 7 = 2 (\operatorname{mod} 12)$.

Je-li p prvočíslo, pak můžeme i dělit a dokonce hovořit o zlomcích. Příklady:

$$\frac{2}{3} = 3,\ \frac{3}{4} = 6,\ \frac{2}{5} = 6,\ \frac{3}{5} = 2,\ \frac{4}{5} = 5,\ \frac{5}{6} = 2\ (\operatorname{mod} 7).$$

Zkuste si pro radost odpovědět na otázku, co je $\frac{1}{7}$ $(\operatorname{mod} 7)$?

A my se zatím vrátíme k otázce, zda je nebo není číslo 13 Gaussovým prvočíslem. Vzpomeneme si na *Wilsonův test prvočíselnosti*, který praví, že číslo p je prvočíslem právě tehdy, když je

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p.$$

Odtud vyplývá, že 13 dělí číslo $12! + 1$. Ale

$$\begin{aligned} 12! + 1 &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 + 1 \\ &\equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot (-6) \cdot (-5) \cdot (-4) \cdot (-3) \cdot (-2) \cdot (-1) + 1 \\ &= (6!)^2 + 1 = (6!)^2 - i^2 = (6! + i)(6! - i). \end{aligned}$$

Číslo 13 tedy dělí součin $(6! + i)(6! - i)$ aniž by dělilo kterýkoli z faktorů $(6! + i)$, $(6! - i)$, neboť pochopitelně jakýkoli gaussovský násobek třináctky musí být tvaru $13a + 13bi$. Odtud plyne, že číslo 13 *nemůže* být Gaussovým prvočíslem. A teď pozor: je-li $a + bi$ kladným Gaussovým prvočíslem, které dělí 13, pak totéž musí platit pro $a - bi$, takže třináctku také dělí jejich součin $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$. Třináctka tedy *musí* být tohoto tvaru.

Nic nám ovšem nebrání právě provedenou úvahu zobecnit na libovolné obyčejné prvočíslo. Obdržíme následující užitečnou poučku.

Věta 2. *(Obyčejné) prvočíslo p je možné Gaussovsky faktorizovat právě tehdy, když $p + 1$ není násobkem čísla 4.*

V podstatě jsme dokázali následující výsledek, jenž je znám jako *Fermatova věta o dvou čtvercích*.

Věta 3. *Každé (obyčejné) prvočíslo p je možné zapsat ve tvaru součtu dvou druhých mocnin právě tehdy, když $p + 1$ není násobkem čísla 4. Tento zápis je jednoznačný.*

Pro nás je ovšem zajímavé hlavně to, jak se projevuje Fermatova věta ve světě Gaussových prvočísel. Máme

$$\begin{aligned} 2 &= (1 + i)(1 - i) = 1^2 + 1^2, \\ 3 &\text{ zůstává prvočíslem,} \\ 5 &= (2 + i)(2 - i) = 2^2 + 1^2, \\ 7 &\text{ zůstává prvočíslem,} \\ 11 &\text{ zůstává prvočíslem,} \\ 13 &= (6 + i)(6 - i) = 3^2 + 2^2, \end{aligned}$$

a schéma je jasně patrné.

S Gaussovými prvočísly ovšem nevystačíme. Další krok za nás provedl Gaussův žák Gotthold Eisenstein (1823–1852), jeden z proslulých matematiků, kteří se nedožili třicítky (do této kategorie patří dále třeba Évariste Galois, Niels Henrik Abel nebo Raymopnd E.A.C. Paley, zatímco Srinivasa Ramanujan z ní unikl o vlásek).

Eisensteinovým celým číslem nazveme každé číslo tvaru $a + b\omega$, kde $\omega = (-1 + i\sqrt{3})/2$. Poznamenejme, že ω je jedním ze tří kořenů rovnice $x^3 = 1$, přičemž zbylými dvěma kořeny jsou 1 a $\omega^2 = (-1 - i\sqrt{3})/2$.

Zajímavé je, že Eisensteinova čísla také oplývají vlastností jednoznačnosti prvočíselné faktorizace, podobně jako obyčejná celá čísla či Gaussova celá čísla. Tentokrát ovšem musíme pracovat se šesti jednotkami, a sice ± 1, $\pm\omega$, $\pm\omega^2$.

Věta 4. *Každé nenulové Eisensteinovo celé číslo lze jednoznačně zapsat ve tvaru součinu mocnin čísel $-1, \omega$ a mocnin kladných Eisensteinových prvočísel.*

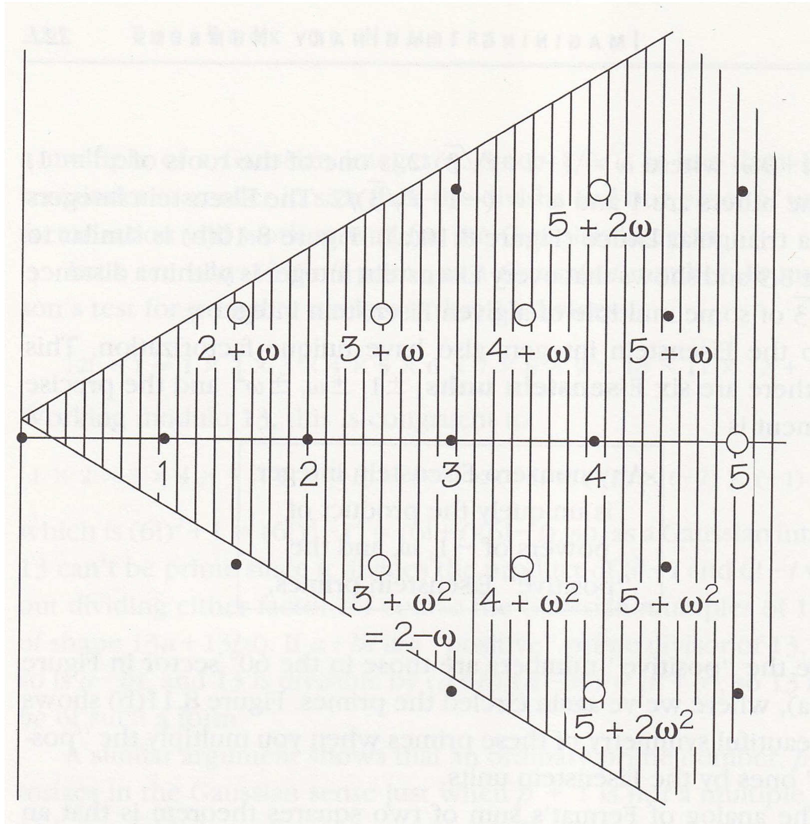
Podobně jako u Gaussových čísel, i Eisensteinova kladná prvočísla odbydeme obrázkem.
Eisensteinova kladná prvočísla, násobená mocninami -1 a ω, pak vidíme na obr. 7.
A konečně obdoba Fermatovy věty v Eisensteinově systému má následující tvar.

Věta 5. *Každé prvočíslo p je možné zapsat ve tvaru $a^2 - ab + b^2 = (a + b\omega)(a + b\omega^2)$ právě tehdy, když $p + 1$ není násobkem čísla 3. Tento zápis je jednoznačný.*

Praktický dopad Fermatovy věty na Eisensteinův svět je následující:

$$\begin{aligned}
2 &\text{ zůstává prvočíslem,}\\
3 &= (2+\omega)(2+\omega^2) = -\omega(2+\omega)^2,\\
5 &\text{ zůstává prvočíslem,}\\
7 &= (3+\omega)(2+\omega^2),\\
13 &= (4+\omega)(4+\omega^2),\\
19 &= (5+\omega)(5+\omega^2),\\
31 &= (6+\omega)(6+\omega^2),
\end{aligned}$$

atd., přičemž příslušné schéma je opět jasně patrné.



Obrázek 6

Je jasné, jak by měla znít naše následující otázka. Jsou další zobecňování možná?

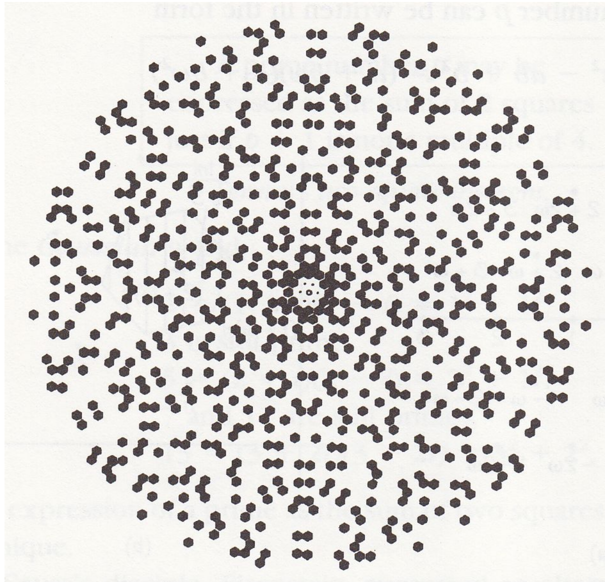
Odpověď je poněkud složitější. Důkaz jednoznačnosti prvočíselného rozkladu pro obyčejné celé číslo není triviální. Důkaz jednoznačnosti prvočíselného rozkladu pro Gaussova a Eisensteinova čísla, která v sobě obsahují $\sqrt{-1}$ a $\sqrt{-3}$, je ještě hlubší a opírá se o geometrické vlastnosti čtverců a rovnostranných trojúhelníků.

A co tedy kupříkladu čísla tvaru $a+b\sqrt{-5}$? Ukazuje se (možná trochu překvapivě), že v tomto systému jednoznačnost prvočíselného rozkladu *neplatí* (!).

Toto pozorování není těžké, vezměme si například

$$6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{-5})(1 - \sqrt{-5}),$$

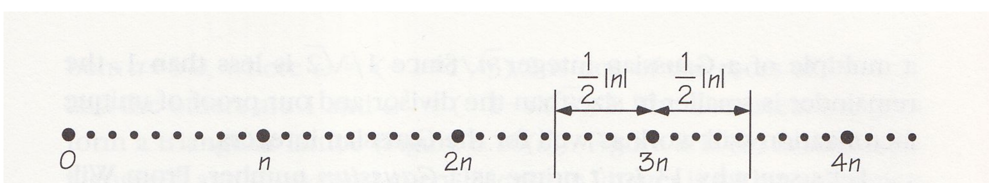
přičemž žádný ze čtyř faktorů 2, 3, $(1 + \sqrt{-5})$, $(1 - \sqrt{-5})$ nelze dále rozkládat. Číslo 6 má tedy v systému $a + b\sqrt{-5}$ (nejméně) dva prvočíselné rozklady.



Obrázek 7

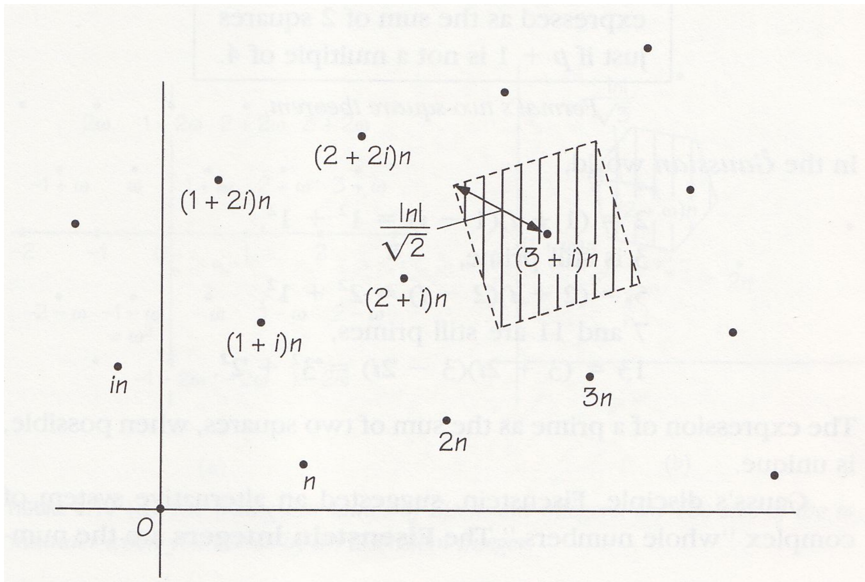
Proč to někdy platí a někdy ne? A čím se to řídí?

Jako poněkud vágní pokus o vysvětlení si povšimneme, že při dělení v tomto číselném systému ne vždy dostaneme zbytek dostatečně menší než dělitel. Buďme trochu konkrétnější. Při dělení v obyčejném číselném systému můžeme vždy vydělit dané číslo jiným, přičemž dostaneme zbytek, který je menší než dělitel. Povolíme-li záporné zbytky, pak se absolutní hodnota zbytku při dělení číslem n nikdy nedostane nad hodnotu $\frac{|n|}{2}$, viz obr. 8.



Obrázek 8

Při dělení v systému Gaussových čísel je situace podobná, na obr. 9 vidíme, že se zbytek při dělení číslem n nachází ve vzdálenosti maximálně $\frac{|n|}{\sqrt{2}}$ od nějakého násobku n. A protože $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, plyne odtud, že zbytek má menší absolutní hodnotu než dělitel, což je jediná klíčová informace, kterou potřebujeme znát pro důkaz jednoznačnosti faktorizace.



Obrázek 9

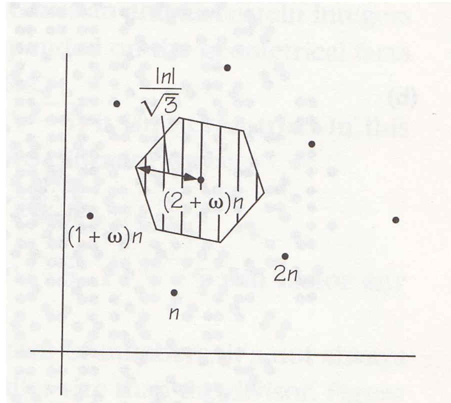
I při dělení v systému Eisensteinových čísel je situace obdobná, viz obr. 10. Tentokrát se dokonce zbytek při dělení číslem n nachází ve vzdálenosti maximálně $\frac{|n|}{\sqrt{3}}$ od nějakého násobku n, což je ještě lepší.
Jenomže v systému čísel tvaru $a + b\sqrt{-5}$ je situace dramaticky jiná, zbytek může být obrovský (viz obr. 11), a jednoznačnost faktorizace neplatí.
A opět je vcelku jasné, jakou otázku si musíme položit teď.

Otázka: Pro která čísla $-d$ má číselný systém $a + b\sqrt{-d}$ jednoznačnou prvočíselnou faktorizaci?

Odpověď je dnes známa, důkaz je však hluboce netriviální. Otázka dlouho představovala důležitý otevřený problém v teorii čísel.

Věta 6. *Číselný systém $a + b\sqrt{-d}$ oplývá jednoznačností prvočíselné faktorizace právě tehdy, když $-d$ je jedno z takzvaných Heegnerových čísel, konkrétně*

$$-1,\ -2,\ -3,\ -7,\ -11,\ -19,\ -43,\ -67,\ -163.$$



Obrázek 10

Gaussův systém odpovídá hodnotě -1, Eisensteinův pak hodnotě -3. Poznamenejme, že u všech hodnot s výjimkou prvních dvou musíme jako celá čísla přijmout čísla tvaru $a+b\sqrt{-d}$, kde *dvojnásobky* a a b jsou celá čísla (tak jsme to koneckonců provedli pro Eisensteinova čísla).

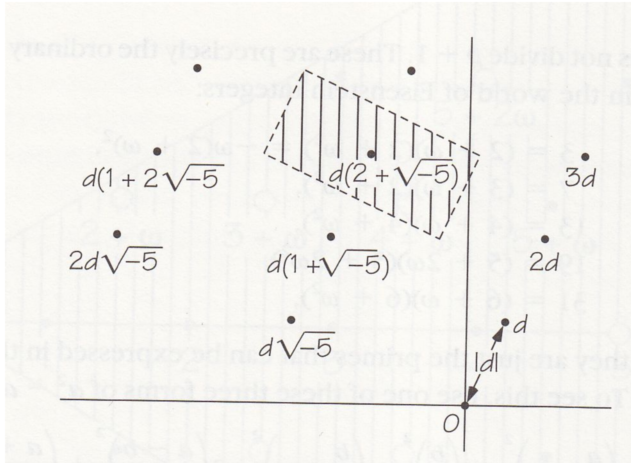
Povšimněme si, že Heegnerových čísel je právě devět, tedy počet vpravdě ďábelský.

Poměrně dlouho matematikové věděli o devíti uvedených číslech (zvaných *devět magických determinantů*), nebylo však známo, zda náhodou neexistují ještě nějaká jiná taková čísla. Později bylo dokázáno pozoruhodné tvrzení: může existovat nejvýše jeden další magický determinant. Vznikl tak slavný *problém desátého determinantu*. V roce 1936 dokázali Heilbronn a Linfoot, že pokud by desátý determinant existoval, musel by být větší než 10^9. V roce 1952 publikoval Heegner důkaz neexistence desátého determinantu, odborníci jej však zpochybňovali. Svět byl o neexistenci dalšího takového čísla přesvědčen až v letech 1966–1967, kdy nezávisle na sobě publikovali dva různé důkazy Harold Stark a Alan Baker. To však ještě kupodivu nebyla tečka za celým případem, neboť o dva roky později provedl Harold Stark pečlivou analýzu starého Heegnerova důkazu a prokázal, že k němu byli kritici nespravedliví; důkaz byl víceméně v pořádku.

Pro nás je zajímavý hlavně následující důsledek uvedené věty.

Důsledek. *Pro přirozené číslo k dává polynom*

$$n^2 - n + k$$



Obrázek 11

prvočíselné hodnoty pro všechna $n = 1, \dots, k-1$ *právě tehdy, když rovnice*

$$x^2 - x + k$$

má kořeny

$$\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{-d}),$$

kde d *je Heegnerovo číslo, jinými slovy právě tehdy, když* $1 - 4k$ *je Heegnerovo číslo.*

Prostým výpočtem zjistíme, že to může nastat jedině pro čísla $k = 2, 3, 5, 11, 17$ nebo 41.

Uveďme ještě pro úplnost tabulku všech těchto hodnot (kromě těch, které odpovídají číslu 41, ty jsme již uvedli výše):

$n^2 - n + 2:\ 2$
$n^2 - n + 3:\ 3,\ 5$
$n^2 - n + 5:\ 5,\ 7,\ 11,\ 17$
$n^2 - n + 11:\ 11,\ 13,\ 17,\ 23,\ 31,\ 41,\ 53,\ 67,\ 81,\ 101$
$n^2 - n + 17:\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 37,\ 47,\ 59,\ 73,\ 89,\ 107,\ 127,\ 149,\ 173,\ 199,\ 227,\ 257.$

Tři krátké poznámky na závěr

Rád bych poznamenal, že mne těší, že žádný desátý magický determinant neexistuje. Jinak bych si totiž ve světle výše uvedeného výsledku Heilbronna a Linfoota musel oblíbit příliš velké číslo, a to by se nemuselo podařit.

Dlužím Vám řešení modifikované úlohy. Je jen jedno a jistě na něj snadno přijdete sami. Pokud Vás nenapadne nic mazanějšího, tak zkuste postupné dosazování. Pokud začnete u nejmenších hodnot proměnné n, vydrží Vám to déle a užijete si více švandy.

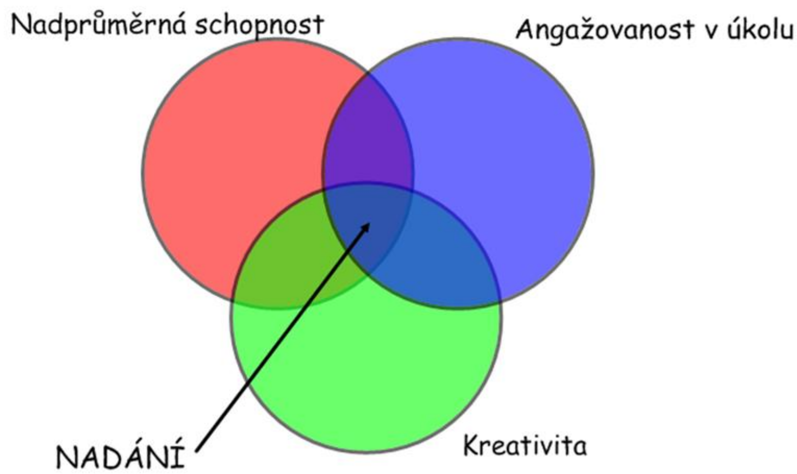
Na závěr prosím laskavého čtenáře aby, pokud má v oblibě či neoblibě nějaké číslo, mi o tom napsal (včetně případných důvodů) a rozšířil tak moji sbírku, předem mu velice děkuji.

Péče o nadané žáky z pohledu psycholožky PPP

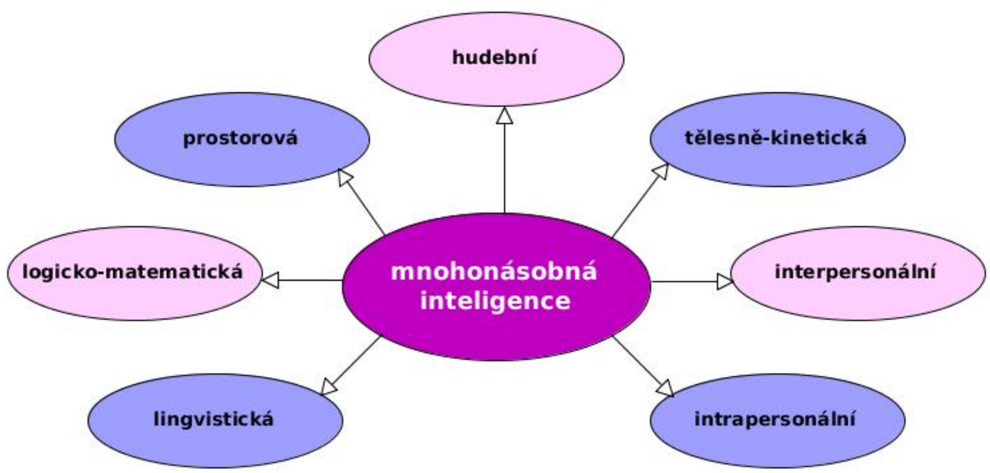
Pavla Picková
PPP Praha 1,2, a 4

Cílem tohoto článku je podat přehled informací a zdrojů, které by mohly v praxi pomoci učitelům při podpoře a vedení nadaných žáků a studentů. Pozornost zaměřím na pojem nadání jako takový, na jeho identifikaci, dostupný systém péče, charakteristiku nadaných a zdroje možností práce s nadaným žákem.

Zájem o nadané žáky a studenty se v posledních letech stupňuje. Výzkum v této oblasti je velmi bohatý, v ČR je spojován zejména s prací PhDr. Hany Drábkové, která se již v 80. letech 20. století zabývala výzkumem dědičnosti nadání a zúčastnila se v roce 1988 1. konference ECHA (European Council for High Ability) v Curychu. Nyní se této problematice věnuje česká pobočka ECHA – Společnost pro talent a nadání (STaN), také např. Centrum nadání, společnost Mensa aj.
Podrobný přehled historie výzkumu a teorií nadání by byl pro účely tohoto článku příliš rozsáhlý, proto se omezím jen na několik poznámek. Dodnes se různí způsoby užití pojmů nadání a talent, v některých zahraničních zdrojích se užívají jako synonyma, jinde se rozlišují podle zaměření nebo míry vrozenosti či tréninku. Nejčastěji je na základě nových poznatků nadání *definováno spíše jako vrozený předpoklad k podávání nadprůměrných výkonů, opouští se tedy jednodimenzionální charakteristiky jako je třeba pouhá míra změřeného IQ v testu – pracuje se s celou osobností jedince.* Ve školském prostředí je nejčastěji využívána tzv. **Renzulliho triáda z roku 1978** (Joseph. S. Renzulli je profesorem psychologie na University of Connecticut), tj. za hlavní znaky nadání nejsou považovány jen nadprůměrné schopnosti, ale i přiměřený vlastní zájem o danou činnost s prvky kreativity, tj. vlastního tvořivého přístupu - viz obr. 1.
Další z teorií, která je v centru pozornosti v posledních letech, je **Gardnerova teorie mnohočetných inteligencí z roku 1983** (Howard E. Gardner je profesorem psychologie na Harvard University). Podle ní má člověk devět typů inteligence, které jsou na sobě nezávislé - viz obr. 2.
Pěkný přehled současných teorií inteligence je uveden v [3].



Obrázek 1



Obrázek 2

V každodenní praxi se jako pracovnice PPP setkávám více s praktickými požadavky učitelů v oblasti nadání – identifikace, konkrétní specifika daného žáka či studenta, tvorba IVP, event. materiály a zdroje pro další práci. Momentálně jsou rozpracovány screeningové dotazníky[1], které by měly pomoci učitelům na všech úrovních vytipovat nadané děti ve třídě. Že to není vždy jednoduché ani pro zkušeného učitele, nám může pomoci objasnit následující přehled, který porovnává tzv. bystré a nadané děti. I když se na první pohled mohou charakteristiky jevit podobné, znamenají různé typy myšlení a tudíž i potřebu přiměřeného přístupu ze strany učitele.

Některé rozdíly mezi bystrým a nadaným dítětem (podle [7])

Bystré dítě

- Umí odpovídat
- Zajímá se
- Má dobré nápady
- Odpovídá na otázky
- Je vůdcem skupiny
- Jednoduše se učí
- Mezi vrstevníky je oblíbeno
- Chápe významy
- Přesně kopíruje zadaná řešení
- Dobře se cítí ve škole, ve školce
- Přijímá informace
- Je vytrvalé při sledování
- Je spokojené s vlastním učením a výsledky

Nadané dítě

- Klade další otázky

[1] individuální vzdělávací plán

- Je zvědavé
- Má neobvyklé nápady
- Zajímají jej detaily, rozpracovává, dokončuje
- Je samostatné, často pracuje samo
- Většinu učiva už zná
- Víc mu vyhovuje společnost starších dětí
- Dělá závěry
- Vytváří nová řešení
- Dobře se cítí, když se učí (něco nového)
- Využívá informace
- Sleduje pozorně
- Je velmi sebekritické

Ani skupina nadaných dětí není vždy homogenní, ve škole se mohou projevovat překvapivě, ne vždy jsou akademicky úspěšné. O jejich typologii se pokusila **Dr. Maureen Neihart** (klinická psycholožka s učitelskou praxí, která se nadáním intenzivně zabývá, nyní pracuje na University of Singapore).

- **Úspěšné nadané dítě**
  Učitel toto dítě často správně identifikuje. Je to dítě, které se velmi dobře učí, má samé jedničky, dovede jednat s dospělými, je poslušné a nemá žádné problémy v chování.

- **Vysoce tvořivé nadané dítě**
  Takové dítě stále vymýšlí něco nového, experimentuje. Je pro něj obtížné přizpůsobit se pevnému školnímu systému. Opravuje dospělé, chce měnit školní pravidla, špatně se ovládá. Chování takových dětí bývá velmi konfliktní.

- **Nadané dítě maskující své schopnosti**
  Takové dítě obvykle schovává, maskuje své skutečné, často nadprůměrné schopnosti jen proto, aby bylo přijato ostatními spolužáky. Obecně platí, že

tyto děti mívají velmi nízké sebevědomí i sebehodnocení a často jsou velmi frustrovány. Tento typ se často týká nadaných dívek, zejména na počátku střední školy.

- **„ Ztroskotané, odpadlé“ nadané dítě**
  Dítě tohoto typu stojí často v opozici, proti všem a všemu. Protestuje proti dospělým, rodičům i učitelům, kamarádům, sourozencům, proti celé společnosti. Je stále nespokojeno a dává to najevo. Také ono má snížené sebevědomí, a zároveň má pocit, že mu nikdo nerozumí. Buď vyrušuje nebo již zcela rezignovalo, ztratilo motivaci a odmítá jakoukoliv školní činnost. Nedělá školní úkoly a nepřipravuje se. Jeho školní výkony bývají velmi nevyrovnané, hodnocení průměrné až podprůměrné.

- **Nadané dítě s určitou vývojovou poruchou** (nejčastěji se specifickou vývojovou poruchou učení.) Školní výsledky těchto dětí zdaleka neodpovídají tomu, jak velmi nadaní tito jedinci bývají. Jejich školní zadání bývají často nedokončena, nejsou schopny pracovat pod časovým tlakem a bojí se jakéhokoliv selhání. Většinou jsou hodnoceny jako žáci s průměrnými schopnostmi.

- **Autonomní nadané dítě**
  Toto dítě bývá velmi nezávislé, vystačí si samo se sebou. Je schopno riskovat, má velmi pozitivní sebehodnocení a využívá školní vzdělávací systém tak, aby z něj samo mělo co nejvíc užitku.

Smyslem IVP pro nadané dítě je pokusit se po zmapování jeho schopností, osobnosti a silných i slabých oblastí nastavit mu učební plán „na míru“ tak, aby je posiloval a rozvíjel dle potřeby. S tím může učitelům pomoci koordinátor péče o mimořádně nadané. **V každém kraji ČR působí 1 až 2 psychologové PPP, krajští koordinátoři péče o nadané** (jejich seznam je na webu NÚV (www.nuv.cz, sekce Nadání a nadaní). **Nově k nim od roku 2010 přibyli speciální učitelé.** Tito odborníci se pravidelně setkávají na celostátní úrovni, sdílejí zkušenosti vlastní praxe i z různých konferencí, podílejí se na standardizaci testových metod, poskytují pomoc a konzultace učitelům v rámci příslušného kraje.

Legislativně je péče o nadané zakotvena v těchto dokumentech:

- **Zákon 561/2004 Sb.** (školský zákon), § 17 - Vzdělávání nadaných dětí, žáků a studentů

- **Vyhláška 73/2005 Sb. ve znění Vyhlášky 147/2011 Sb.** o vzdělávání dětí, žáků a studentů se speciálními vzdělávacími potřebami a dětí, žáků a studentů mimořádně nadaných
- **Informace ke vzdělávání dětí, žáků a studentů mimořádně nadaných** zabezpečující realizaci ustanovení § 17 zákona 561/2004 Sb. a část třetí vyhlášky 73/2005 Sb. - Věstník MŠMT ČR, prosinec 2006
- **Rámcový vzdělávací program pro základní vzdělávání**, kapitola 9 – Vzdělávání žáků mimořádně nadaných - Věstník MŠMT ČR, leden 2005
- **Rámcový vzdělávací program pro předškolní vzdělávání**, kapitola 8 – Vzdělávání dětí se speciálními vzdělávacími potřebami a dětí mimořádně nadaných - Věstník MŠMT ČR, únor 2005

V současné době se připravují návrhy k doplnění těchto zákonů tak, aby bylo možno využívat podpůrná a vyrovnávací opatření v plné šíři včetně navýšení normativu apod. pro nadané žáky a studenty.

Ještě než uvedu seznam literatury, která by mohla být pedagogům v praxi užitečná, a seznam internetových odkazů a adres některých organizací u nás i v zahraničí, které se nadanými zabývají, ráda bych celý článek uzavřela myšlenkou **prof. Eriky Landau z Izraele**, která se nadanými celoživotně zabývá:

- U dětí, jejichž konstruktivní schopnosti nejsou podporovány, vyvstává nebezpečí, že svou inteligenci využijí pro destruktivní cíle.

Literatura

[1] DOČKAL, V. *Zaměřeno na talenty aneb Nadání má každý*. 2005, Lidové noviny.

[2] FOŘTÍKOVÁ, FOŘTÍK. *Nadané dítě a rozvoj jeho schopností*. Praha: 2007, PORTÁL.

[3] HAVIGEROVÁ, J. *Pět pohledů na nadání*. 2011, GRADA.

[4] HŘÍBKOVÁ, L. *Nadání a nadaní*. PRAHA: 2005, PF UK.

[5] JURÁŠKOVÁ, J. *Základy pedagogiky nadaných*. Praha: 2011, IPPP.

[6] LANDAU, E. *Akropolis*. Bratislava: 2007, Akropolis.

[7] LAZNIBATOVÁ, Jolana. *Nadané dieťa, jeho vývin, vzdelávanie a podporovanie*. Bratislava: 2001, IRIS.

[8] MACHŮ, E. *Rozpoznávání a vzdělávání rozumově nadaných dětí v běžné třídě ZŠ*. Brno: 2006, PF MU.

[9] MONKS, F. J. *Nadané dítě*. Praha: 2002, GRADA.

[10] PORTEŠOVÁ, Š. *Základy pedagogiky nadaných*. Praha: 2011, PORTÁL.

[11] VÚP Praha. *Tvoříme individuální vzdělávací plán mimořádně nadaného žáka*. Dostupné z : www.vuppraha.cz.

Seznam internetových odkazů

- Společnost pro talent a nadání (STaN – ECHA) www.talent-nadani.cz
- MENSA ČR www.mensa.cz
- Centrum nadání www.centrumnadani.cz
- Centrum rozvoje nadaných dětí (Brno, dr. Portešová) www.nadanedeti.cz
- Projekt PERUN (síť center informací a rozvoje nadaných, navazuje na Talnet) www.talentovani.cz
- Projekt TALNET (nadaní žáci se zájmem o přírodní vědy – internetové kurzy a projekty) www.talnet.cz
- Projekt Badatel na UP Olomouc, vhodná alternativa k soutěžím www.badatel.upol.cz
- Beskydská šachová škola www.chessfm.cz
- ECHA (European Council for High Ability) www.echa.ws
- Škola pro nadané děti - Slovensko www.nadanedeti.sk
- WCGTC – World Council for Gifted and Talented www.world-gifted.org
- SENG (Supporting Emotional Needs of the Gifted) www.sengifted.org

Ráda bych touto cestou podpořila všechny učitele, kteří se nadaným dětem věnují, neboť věřím, že ačkoli je to práce těžká, ja také velmi záslužná a pro obě strany obohacující.

Trocha teorie čísel

Lenka Slavíková
Matematicko-fyzikální fakulta UK, Katedra matematické analýzy, lenka.8@seznam.cz

Na přednášce jsme vyřešili několik úloh z elementární teorie čísel. Z výsledků těchto příkladů jsme se poté dozvěděli zajímavé údaje ze života Victora Franze Hesse. Předložené úlohy byly inspirovány úlohami z minulých ročníků Matematické olympiády [1] a matematické soutěže Náboj [2].

Úmluva. Zápisem $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1}$ budeme rozumět desítkový zápis čísla

$$a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \cdots + a_2 \cdot 10^1 + a_1 \cdot 10^0.$$

Vždy budeme předpokládat, že $a_n \neq 0$.

Úloha 1. Pro které roky ve dvacátém století platí, že jejich pořadové číslo je druhou mocninou celého čísla?
Výsledek. 1936
Interpretace. Victor Franz Hess dostal v roce 1936 Nobelovu cenu za fyziku.

Úloha 2. Myslím si čtyřciferné číslo. Každou z číslic svého čísla zvětším o jedna, čímž získám další čtyřciferné číslo. Když obě čísla sečtu, dostanu výsledek 5923. Jaké číslo si myslím?
Výsledek. 2406
Interpretace. Victor Franz Hess se narodil 24. 6.

Úloha 3. Na kartičce mám napsáno liché čtyřciferné číslo. Nyní kartičku v půlce rozstřihnu, čímž získám dvě dvouciferná čísla. Prozradím ti, že jejich součin je 1494. Jaké číslo mám napsáno na kartičce?
Výsledek. 1883
Interpretace. Victor Franz Hess se narodil v roce 1883.

Úloha 4. Najdi všechna čtyřciferná čísla $\overline{abcd}$ dělitelná pěti taková, že $a + b = 8$, $b + c = 8$, $c + d = 5$.
Výsledek. 5350
Interpretace. Victor Franz Hess objevil kosmické záření dne 7. srpna 1912 (což ovšem nijak nesouvisí s výsledkem této úlohy). Při svém letu balonem, díky němuž objev uskutečnil, vystoupal do výšky 5350 metrů.

Úloha 5. Povím ti něco o svém oblíbeném zlomku. Jeho čitatel i jmenovatel jsou přirozená čísla se součtem 120. Hodnota mého zlomku je větší než $\frac{1}{3}$. Navíc je

to nejmenší zlomek, který splňuje obě předešlé podmínky. Už víš, jaký je můj oblíbený zlomek?
Výsledek. $\frac{31}{89}$
Interpretace. Vytvořme zlomek následujícím způsobem. Do čitatele napišme počet minut, které uplynuly od půlnoci z 6. na 7. srpna 1912 do okamžiku, kdy se Hess vydal na svůj slavný let balonem. Jako jmenovatel použijme počet minut, které uplynuly od onoho okamžiku do půlnoci z 7. na 8. srpna 1912. Hodnota tohoto zlomku je rovna $\frac{31}{89}$. Odtud snadno dopočteme, že Hess zahájil let balonem v 6 hodin 12 minut.

Úloha 6a. Najdi nejmenší trojciferné číslo dělitelné pěti takové, že když k němu přičtu číslo, které má opačné pořadí číslic (desítkový zápis tohoto čísla může začínat nulou), vyjde mi 867.
Výsledek. 285

Úloha 6b. Najdi všechna šesticiferná čísla $\overline{abcdef}$ splňující

- po odečtení dvojky od původního čísla bude výsledek dělitelný šestnácti,
- v desítkovém zápisu čísla se vyskytují právě čtyři různé číslice,
- f je druhou mocninou celého čísla,
- $a = ec$,
- $c = a^2$,
- $2f = b + d$.

Výsledek. 151314
Interpretace. Výsledky obou částí úlohy napíšeme do tabulky následujícím způsobem:

2	8	5
15	13	14

Číslo v každém políčku tabulky udává pořadí nějakého písmena v anglické abecedě. Nahraďme tedy čísla v tabulce odpovídajícími písmeny. Nová tabulka bude vypadat takto:

B	H	E
O	M	N

Písmena v tabulce přečtěme po sloupcích. Nad písmeno O je třeba přidat přehlásku. Výsledné slovo BÖHMEN je název balónu, ve kterém Hess dne 7. srpna 1912 podnikl zmiňovaný let.

Literatura

[1] Matematická olympiáda, kategorie Z. Dostupné z : http://www.math.muni.cz/mo/.

[2] Náboj. Matematická soutěž. Dostupné z : http://naboj.org.

Dveře do nanosvěta

Martin Špergl
Vysoká škola chemicko-technologická, martin.spergl@seznam.cz

Nanotechnologie zažívají během posledních let velký rozmach. S nevelkou nadsázkou lze říci, že po době kamenné, železné, století páry, době křemíkové a době plastové zažíváme úsvit „*nanodoby*“.
Ačkoliv se definice nanočástic liší dle metody, zamýšleného použití a autora, většinou se za ně dají pokládat částice menší než 100 nm. Proč se nad tím vzrušovat? Materiálové vlastnosti, které v běžném makrosvětě považujeme za neměnné, se totiž u takových částic mohou rapidně lišit v závislosti na jejich velikosti. Kromě jiných dochází ke změně optických a elektrických vlastností a změnám v interakci s živými organismy, které otevírají nové možnosti v (nano)elektrotechnice, chemii, lékařské diagnostice, experimentální medicíně aj. Současně narůstá zlomek atomů, které jsou na povrchu částice a tedy v kontaktu s okolím, což ovlivňuje celou řadu povrchových dějů jako je katalytická aktivita a adsorpce. Mění se průchodnost biomembránami.
I v dnešní době se s nanočásticemi dostáváme nevědomky do styku. Například s nanočásticemi oxidu titaničitého používanými v opalovacích krémech jako ochranný filtr, nanočásticemi stříbra v oblečení k potlačení růstu plísní, uhlíkovými nanočásticemi ve výfukových plynech vznětových motorů, i nanoaditivy v potravinách. Přičemž otázka jejich kumulace v životním prostředí a organizmech stále ještě není uspokojivě zodpovězena.
Pro příklady nanočástic ovšem není třeba chodit daleko. Nemusíme se nacházet v moderně vybavené laboratoři ani zrovna pálit naftu ve válcích. Kromě těch vytvořených člověkem přicházíme denně do styku i s mnohem rafinovanějšími nanočásticemi – viry.
K tomu, abychom mohli využívat nanočástic pro vlastní prospěch, musíme vyřešit otázku jejich syntézy, charakterizace a v neposlední řadě jejich toxicity. Člověk již ovládl několik cest k jejich syntéze a další jsou na cestě. Při charakterizaci nanočástic se potýkáme s mnoha problémy, mezi které mj. patří nemožnost pozorovat je konvenčními optickými metodami daná difrakčním limitem (laterální rozlišení ve viditelném spektru cca 250 nm), snadná kontaminace nanopovrchů prachovými částicemi s fatálními následky a z ní často vyplývající nutnost pracovat v ultračisté atmosféře nebo pod vakuem, které může být vynuceno již samotnou povahou analytické metody (např. u elektronové mikroskopie). O kvantifikaci a kvalifikaci jejich toxicity bylo sepsána řada studií, které ale narážejí na problémy se stále ještě nedokonalou charakterizací a hlavně enormním počtem experimentálních

proměnných a možností dlouhodobých, kumulativních účinků na živé organismy. Není pochyb o tom, že se před námi otevírají dveře do světa nevídaných možností, ale i zatím neznámých nástrah. Stejně jako v případě ohně tedy platí pro nanočástice rčení: „Dobrý sluha, špatný pán.“

Fyzika na počítači - Algodoo

Martin Švec
Katedra fyziky, Přírodovědecká fakulta UJEP, martin.svec@ujep.cz

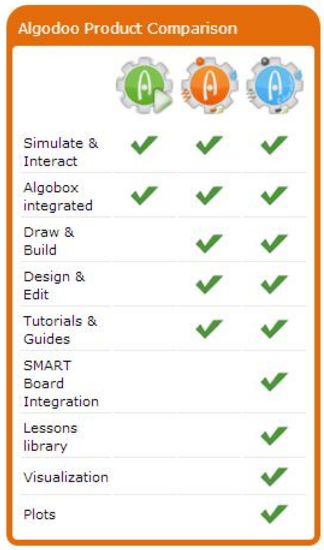
Výuka fyziky a vůbec fyzika samotná se bez reálného experimentu neobejde. Přesto v mnoha případech může být experiment provedený na počítači vhodným doplňkem výuky, případně může být použit jako motivační prvek. Jedním z nástrojů, který lze za tímto účelem použít, je program Algodoo.
Jedná se o poměrně propracovaný nástroj, který věrně simuluje skutečné chování těles z mechanického hlediska a částečně z oblasti termiky a optiky. Hodí se proto především ve výuce těchto oblastí fyziky. V příspěvku nebudu podrobně popisovat všechny možnosti programu a spíše uvedu některé příklady využití na konkrétních příkladech.
Všechny další potřebné informace uživatel nalezne na stránce http://www.algodoo.com, kde je možné program zároveň stáhnout ve třech tipech licencí:

1. Algodoo Play & Demo Free - k dispozici zdarma

2. Algodoo Physics - cena 2,99 €

3. Algodoo for Education - cena 29,99 €

Jednotlivé licence nabízejí tyto možnosti (uvádím původní zdroj v angličtině - program zatím není k dispozici v českém jazyce, nabízí však možnost nastavení aspoň slovenštiny):



Obrázek 1: Jednotlivé licence programu v pořadí, jak je uvedeno výše.

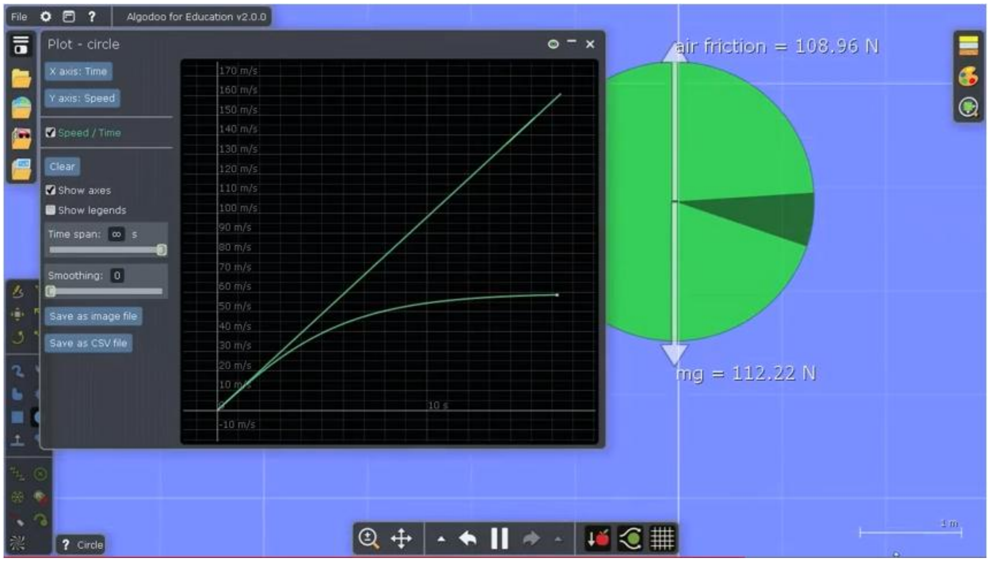
Konkrétní příklady použití

Volný pád a pád ve vzduchu

Program umožňuje „vypnout“ odpor prostředí a simulovat tím pohyb ve vakuu. Při působení gravitační síly tak můžeme demonstrovat volný pád a ten pak porovnat s pádem v atmosféře. Na příslušném grafu závislosti rychlosti na čase je dobře patrný pokles zrychlení tělesa, na které působí odpor prostředí. Z grafu je také patrné dosažení kritické rychlosti, kdy zrychlení tělesa dosáhne nulové hodnoty.

Pružiny a tlumení

Program umožňuje využívat různé přednastavené prvky. Jedním z nich jsou pružiny, u nichž lze krom tuhosti také definovat tlumení. Na příkladu čtyř pružin lze ukázat důsledky různých tlumení. Nastavíme pro první pružinu nulové tlumení, pro druhou nějaké standardní, pro třetí kritické a pro čtvrtou superkritické. Spustíme-li simulaci tak, aby všechny pružiny měly na začátku stejnou výchylku, můžeme porovnat jejich chování. První z nich kmitá se stále stejnou amplitudou, druhá je postupně tlumena a amplituda klesá, třetí dosáhne nulové výchylky nejrychleji, navíc bez přechodu přes nulovou výchylku, čtvrtá dosáhne nulové



Obrázek 2: Volný pád a pád ve vzduchu

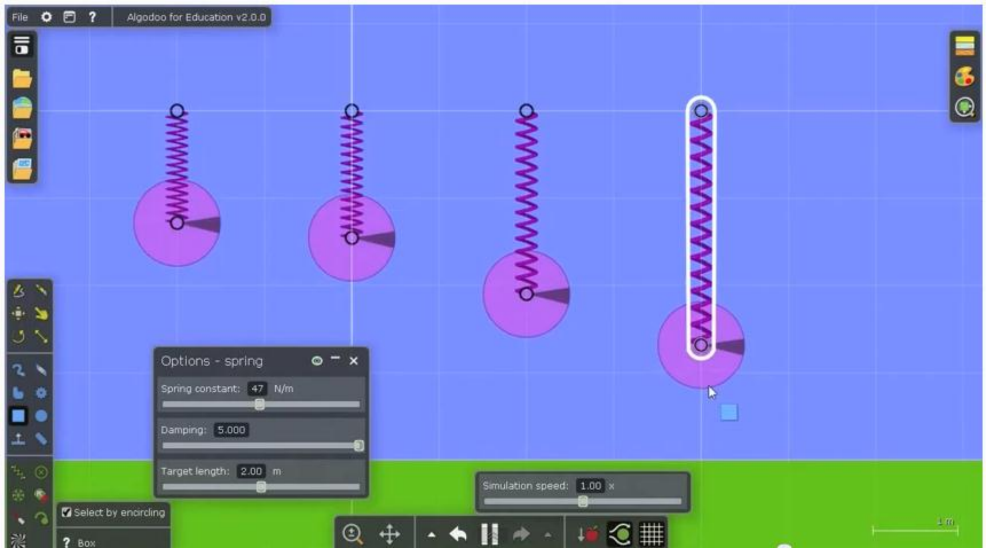
výchylky stejným způsobem jako třetí pružina, avšak s časovým zpožděním. Na tomto pokusu lze demonstrovat například důležitost kritického tlumení u tlumičů v automobilech.

Posuvná versus rotační kinetická energie

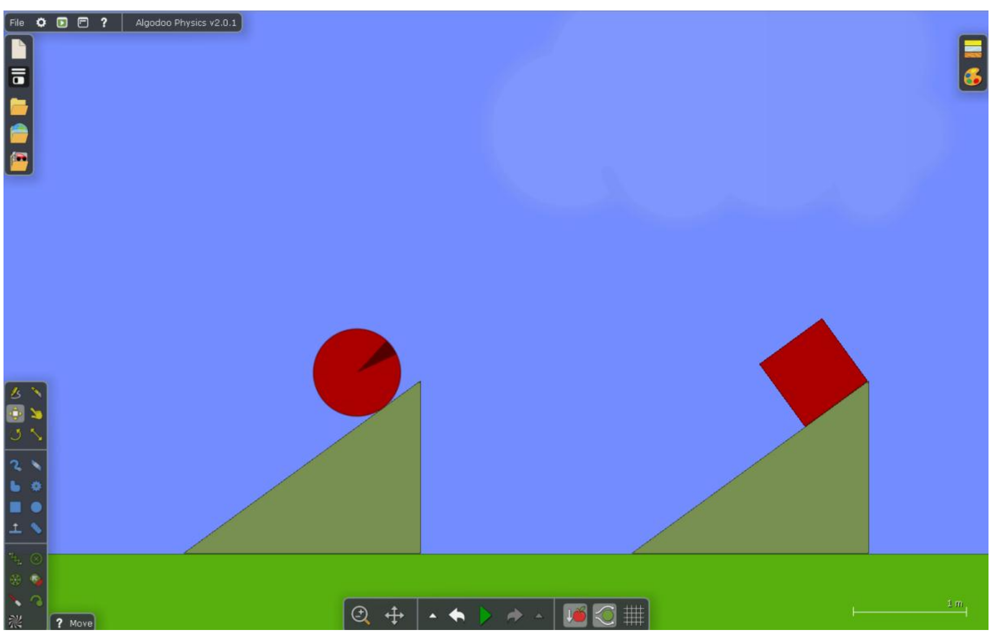
Po nakloněné rovině se dolů kutálí koule a bez tření sjíždí hranol. Které z těchto těles získá větší rychlost? Na pokusu lze názorně ukázat, že rychlejší bude hranol. Část kinetické energie koule je totiž ve formě rotační kinetické energie.

Archimédův zákon

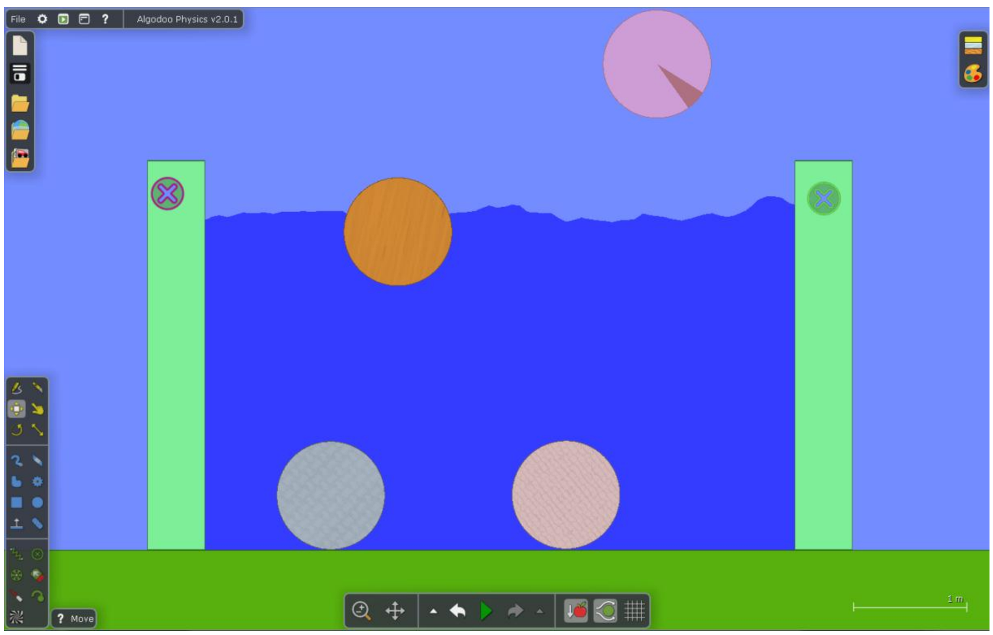
Vděčným nástrojem je možnost simulovat chování kapaliny. Vedle hydrostatického tlaku lze například ukázat chování materiálů s různou hustotou ve vodě, neboli Archimédův zákon. Program umožňuje nastavit hustotu těles a má předdefinované některé hustoty materiálů, jako jsou např. ocel, dřevo, kámen, hélium, apod. Na obr. 5 je ukázáno chování koulí stejných rozměrů postupně z oceli, dřeva, kamene a hélia. Dále je například možné ukázat, proč plave ocelová loďa důsledky jejího přetížení.



Obrázek 3: Pružiny a tlumení



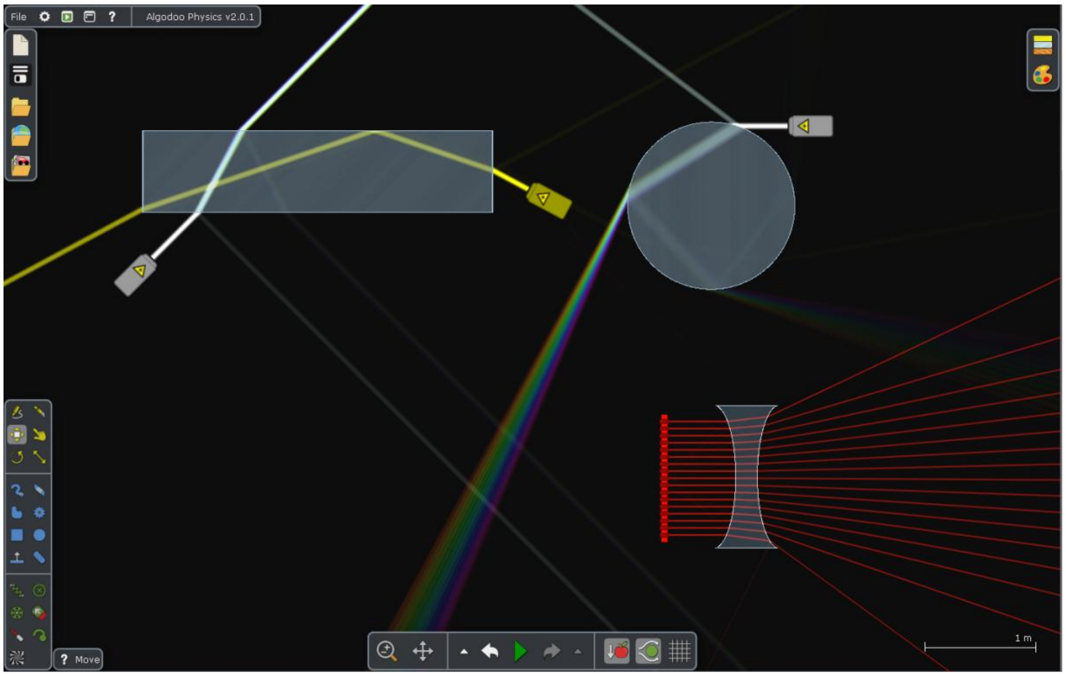
Obrázek 4: Posuvná versus rotační kinetická energie



Obrázek 5: Archimédův zákon

Základy optiky

Vedle mechanických jevů je možné pomocí programu ukázat také jednoduché optické jevy jako je odraz a lom světla, totální odraz nebo rozklad bílého světla. obr. 6 ukazuje některé možnosti. Se zdroji světla, jejichž barvu lze nastavit, je možné pohybovat a ukázat tím, jak se například mění úhel lomu v závislosti na úhlu odrazu.



Obrázek 6: Základy optiky

Celou řadu dalších příkladů naleznete na výše zmíněných stránkách programu, případně na serveru YouTube.

Závěr

Program Algodoo nabízí celou řadu možností, jak žákům demonstrovat základní fyzikální jevy poměrně přitažlivou formou. Navíc je vhodné nechat žáky samotné tyto jevy zkoumat pomocí programu. Z vlastních zkušeností vím, že je to pro ně velmi zábavná a nenásilná forma, jak se s těmito jevy seznámit. Věřím, že naleznete v programu Algodoo svého pomocníka při výuce fyziky.

LETNÍ ŠKOLA
MATEMATIKY A FYZIKY
sborník příspěvků

Editoři: Magdalena Krátká, Jindřich Prokop, Robert Seifert
Návrh obálky: Klára Borůvková, Lenka Součková
Sazba: Jindřich Prokop

Vydavatel: Univerzita J. E. Purkyně v Ústí nad Labem,
Přírodovědecká fakulta
Vydání první, Počet stran: 168, Náklad: 120 ks,
Ústí nad Labem, 2013